長寿リスク内包証券の価値評価に纏わる数理モデルについて
On Mathematical Model for Pricing Financial Securities with Longevity Risk

加藤 恭
Takashi Kato

1. はじめに

生命保険リスクを内包する保険リスク証券の市場の拡大が進んでいる中、特に近年、医療技術の発展に伴う長寿化による「長寿リスク（longevity risk）」の顕在化が見られ、長期年金運用における新たなリスク要因として注目を浴びていると共に、そのリスクを移転するための証券化についても提案がなされている[1]。長寿リスクの計測・管理は保険数理や数理ファイナンスにおける理論研究、及び保険商品や保険リスク証券の設計・金融資産運用実務等においても重要な課題となっているが、そのためには将来の生存率のダイナミクスに関する適切なモデリングや、古典的な金融商品価値評価法の適用が難しい長期の満期を持つ商品のプライシング手法の構築が必要となる。

本研究では、生命保険リスクを表す本質的な要因である生存率（survival rate）または死亡率（mortality rate）の長期的ダイナミクスを数理的に記述するために、[1]等で用いられている二重確率計数過程を用いたモデルを拡張し、将来の金利リスクや長寿リスクに対する証券発行主体及び取引相手の想定する広義のシナリオの下での証券価格評価手法を提案する。より具体的には、金利や死力を表現するファクターあるいは生存率等に対して将来時点における不確実性を含んだ「ランダマイズドシナリオ」を与え、その下での長寿リスク内包証券価格の評価式を条件付確率微分方程式（conditioned stochastic differential equation; CSDE）を用いて導出する。

更に、上記の方法のストレステストへの応用についても考察する。

2. 生保リスク内包証券の価値評価モデル

2.1. モデル概要

ここではまず、生保リスク等により将来の支払額が不確実を伴って変動するような生保リスク内包証券の価格評価手法を紹介する。まず将来の不確実性を記述するための数学的な準備として、通常の条件(usual condition)を満たすフィルター付確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P_0)$を準備しておく[2]。対象とする集団を$I \subset [0,\infty)$と表し、$x \in I$ は現時点$t = 0$においてx歳であるような保険加入者であるとする[3]。$x \in I$の死亡時刻をτ^xと表し、τ^xは

---

[1] 長寿リスク内包証券の取引実例については [31]を参照せよ。

[2] ここでは数学的に厳密な議論には立ち入り過ぎない事とする。フィルター付確率空間に対する正確な定義や通常の条件の詳細に関しては、例えば [46], [47]を参照せよ。

[3] ここで年齢とは「出生時から現時点までの経過時間」を表す正の実数とし（即ち小数点以下の打ち切り等を考慮しない）、集団Iの中には全く年齢が等しい保険加入者は存在しない

$(\mathcal{F}_t)_t$-停止時刻であるとする[4]。今、「将来時点Tまで生存していた被保険者xに保険金G^xを給付する」という生存保険を考えると、T時点における保険会社の支払額（ペイオフ）は次で表される。

$$S_T = \sum_{x \in I} G^x 1_{\{\tau^x > T\}} \tag{1}$$

ここで事象$A \in \mathcal{F}$に対して1_Aは「Aが実現する時は1となり、そうでない時は 0 となる」ような確率変数を表す。またt時点における瞬間的金利（安全利子率）をr_tと表すと、0時点におけるペイオフの「割引価値」は

$$S_0 = \sum_{x \in I} G^x \exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) 1_{\{\tau^x > T\}} \tag{2}$$

で表される。但し上で定義されるS_0は将来のシナリオに依存する量（$\mathcal{F}_0$可測でない確率変数）であるため、現時点$t = 0$で観測可能な情報を用いて値を特定する事は不可能であり、現在価値評価のために次節で紹介される手法を用いる。

なお、現在生存している人間の数は有限であるため、被保険者全体の集合Iも有限集合であると考えられるが、一方で保険数理における伝統的な保険料の価値評価においては「大数の法則」を前提としており、被保険者数が無限大となった時の極限として純保険料の評価がなされている。そのため、被保険者の数が膨大であると考えてIを無限集合として考える事にも意味がある。[1]はIが非可算集合である場合についても取り扱っており、実際上記の和をルベーグ積分に置き換える事で定式化が可能である。

2.2. リスク中立プライシング

ここでは数理ファイナンスあるいは金融工学で一般的とされている「リスク中立測度を用いたプライシング」の概要について述べる。

今、もし上記の生存保険における将来のリスク（生保リスク、金利リスク）が仮に「金融市場で取引されている証券」によってヘッジ出来る、即ちいかなるシナリオが実現したとしてもT時点においての価値がS_Tと等しくなるようなポートフォリオを組む事が出来るとすると（この時市場は「完備」であると呼ばれる[5]）、リスク中立測度あるいは同値マルチンゲール測度と呼ばれる確率測度Qが一意的に存在し、上記の生存保険証券の（割引）現在価値は

$$V_0 = E^Q[S_0] = \int_{x \in I} E^Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) 1_{\{\tau^x > T\}}\right] G(dx) \tag{3}$$

（わずかであっても出生時点は全て異なる）とする。

[4] $\mathcal{F}_t$はt時点までの「情報」を表すσ加法族であり、τ^xが$(\mathcal{F}_t)_t$-停止時刻であるとは、直観的には「xが死亡する時刻は観測可能である（言い換えるならば、t時点までxが生存しているかどうかをt時点までの情報によって知る事が出来る）」事を意味する。

[5] より正確には、「（下に有界な）$\mathcal{F}_T$-可測確率変数として与えられるあらゆる条件付き請求権に対してヘッジが可能である」時の市場を完備と呼ぶ。

と与えられる事が知られている。ここでE^Qは確率測度Qの下での期待値を表すものである。なお、金融市場において「裁定（arbitrage）取引」が出来ない、即ち市場取引によって「ただ儲け」をする事が出来ないという条件（無裁定条件）はリスク中立測度の存在と（概ね）同値である事も知られており、以上を合わせて「数理ファイナンスの基本定理」と呼ぶ（数学的に厳密な議論に関しては、例えば [2], [3], [4], [5]を参照。合わせて [6], [7], [8]も見よ）。

基本定理の考え方に基づけば、不確実性を伴う商品の現在価値とは「将来のペイオフの割引価値に対するリスク中立測度の下での期待値」として表される事となる。そして、ファイナンス実務においても複雑なペイオフを持つ様々なデリバティブ（金融派生商品）の現在価値評価において上記の考え方が用いられている（リスク中立プライシング）。一方、市場が非完備である、即ち市場で取引可能な証券ではヘッジ出来ないリスクが存在している場合、リスク中立測度が一意的に定まるとは限らず、用いる確率測度によってリスク中立価値が変化する事になってしまう。また、市場で取引されている金融商品の価格変動リスクは生存・死亡に纏わるリスクと本質的に異なるものであるため、生保リスクを内包した証券が完備市場で取引されるとは考えにくい。

非完備市場におけるリスク中立測度の与え方に関してはいくつかの観点から研究がなされている。例えば [9], [10]では最小エントロピー確率測度を用いたリスク中立プライシングが提案されており、これによって二乗誤差の意味でのヘッジエラーを最小化するような平均的自己資金従属的ポートフォリオの現在価値として金融商品の現在価値評価が出来る事が示されている。また、主に保険数理において、リスク中立測度を得るための確率変換であるエッシャー変換([11])やワン変換([12], [13])の活用に関しても幅広く研究がなされている[6]。非完備市場における金融商品の現在価値評価に関してはこれ以外にも無差別効用理論を用いたもの（ [14], [15], [16]及びこれらの参考文献も参照せよ）や、凸リスク尺度を用いた good deal valuation に関する議論（ [17], [18]）等もあるが、ここでは詳細を省略する。

いずれにしても、リスク中立プライシングによって商品の価値評価を行う場合は、市場におけるリスク評価や価値評価主体のリスク体質等に基づいた適切なリスク中立確率を選択し、その下での期待値を計算する事によって、金融・保険リスクを内包する証券の現在価値評価を行う事が出来ると言える。以下では価値評価に使用するリスク中立測度を固定してPと表し、またPの下での期待値$E^P[\cdot]$を単に$E[\cdot]$と表す。大数の法則に基づく伝統的な保険数理の考え方に基いて$P = P_0$とする事も考えられ、 [19]では実確率測度の下での期待値によって保険商品の価値評価を行っている。

[6] 数理ファイナンス（あるいは金融工学）と保険数理とでは、数学的手法は類似しているもののそれぞれが対象とする商品の特徴が異なる事により、各々ある程度独立して数理的手法が発達してきた背景があるが、エッシャー変換等の考え方の金融理論への援用等によって「金融と保険の理論の融合」が進められる可能性がある事が [48]で指摘されている。

2.3.　生存・死亡リスクのモデリング

本節では保険加入者$x \in I$の死亡時刻τ^xのモデルに関するより詳細な定式化を紹介する。生存保険・死亡保険に関する数理モデル、あるいは数理ファイナンスにおける債務者の（誘導型）デフォルトリスクモデルにおいては、死亡時刻あるいはデフォルト時刻を「強度過程$\mu^x = (\mu_t^x)_{t \geq 0}$を持つ計数過程（counting process）$N^x = (N_t^x)_{t \geq 0}$の最初のジャンプ時刻」として定式化する事が一般的と言える（[1], [20]等[7]）。即ちN^xは「σ加法族$\mathcal{G}_T$に関する条件付確率」$P(\cdot|\mathcal{G}_T)$の下で

$$P(N_t^x - N_s^x = k\,|\mathcal{G}_T) = \frac{1}{k!}\left(\int_s^t \mu_r^x dr\right)^k \exp\left(-\int_s^t \mu_r^x dr\right) \quad \mathrm{a.s.}, \qquad 0 \leq s \leq t \leq T,\ \ k = 0,1,\ldots \tag{4}$$

を満たすポアソン過程となっているとし[8]、その下で$\tau^x = \inf\{t \geq 0\,; N_t^x > 0\}$と定義する。ここで$(\mathcal{G}_t)_t$は強度過程の情報を含むフィルトレーション（情報系）であり、任意の$x \in I$に対してμ^xは$(\mathcal{G}_t)_t$-可予測である。確率過程N^xが最初に正の整数値を取る、即ち「ジャンプ」する時刻を保険加入者の死亡時刻（あるいはデフォルト時刻）と定義する事になるが、そのジャンプのしやすさを表すのが強度過程μ^xである。強度過程は、保険数理の文脈では死力、デフォルトリスクモデルにおいてはハザード率と呼ばれ、累積強度$\int_0^t \mu_s^x ds$が大きくなると計数過程がジャンプしやすくなる。即ち、μ^xが死亡時刻の分布を特徴付ける事となり、μ^xの適切なモデリングを考える事が重要となる。

生存率あるいは死亡率は年齢（age）効果・時代（period）効果・コホート（cohort）効果の影響を大きく受ける事が知られている [21]。即ち、基本的には年齢xが大きくなる程死亡率も大きくなると考えるのが自然であり、また大災害や戦争等が起こった時代においては死亡率が一時的に増大する等、死力が時刻tによって変化する事も明白である。更に、死亡率は出生年$t-x$がほぼ同一である集団（コホート）に対して同様の特徴を持つ事が実証的に知られており（[22], [23]等）、このような特徴はコホート効果と呼ばれる。

上記のような性質は、死力を「t, xに関するファクターモデル」として定式化する事で一般的な表現が可能である。即ち、dを自然数として各xに対して$Y = (Y_t^x)_t$をd次元値確率過程として与え、適切な数学的条件を満たす決定論的関数$g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$を用いて死力が$\mu_t^x = g(Y_t^x)$と表されるとする。以下ではこの死力ファクター$Y$の動的な構造を数学的に記述する事を考える。

時刻に関する不確実性を伴う動的な変動を記述するためには確率微分方程式（stochastic differential equation; SDE）が用いられるのが一般的である。即ち、各$x \in I$に対して、フ

---

[7] [38]によるハザード率を基とした生存関数によるモデルも本質的には同等である（ [31]も参照せよ)。

[8] 厳密には$P(\cdot|\mathcal{G}_T)$は常に確率測度として定義出来るとは限らないため、「条件付確率の下でのポアソン過程」という表現は正確ではない。しかしその場合も(4) 式自体は意味を持つ事に注意されたい。

ァクター$(Y_t^x)_t$は次のような SDE を満たすと仮定する[9]。

$$dY_t^x = b(Y_t^x)dt + \sigma(Y_t^x)dW_t^x,\ \ Y_0^x = y^x \tag{5}$$

ここで$y^x \in \mathbb{R}^d$は初期値を表す定数であり、$b: \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}^d, \sigma: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{d'}$は適切な数学的仮定[10]を満たす関数（$d'$は自然数）。また$W^x = (W_t^x)_t$は（$x$毎に与えられる）$d'$次元標準ブラウン運動（Wiener 過程）である。なお上式は直観的に分かりやすいように微分形で書かれているが、正確にはこれは下記の積分方程式を表す模式的な数式である事を注意しておく。

$$Y_t^x = y^x + \int_0^t b(Y_r^x)dr + \int_0^t \sigma(Y_r^x)dW_r^x \tag{6}$$

保険加入者を一人固定して考えるのならば上記のモデルで十分だが、無限の保険加入者に対するファクターモデルを同時に考える場合、時刻tと共にさらに年齢xに関する動的変動を扱う必要がある。 [1]ではそのために、複数のパラメーターを持つガウス系の一種であるブラウニアンシート（Brownian sheet）を用いたモデルが提案されている。対象集団Iが有限集合である場合には通常の多次元ブラウン運動を考慮すれば十分である。

2.4.　金利に対するモデリング

数理ファイナンス・金融工学において、利子率過程（スポットレート）$r = (r_t)_{t\geq 0}$に関する様々なモデルが提案されているが、その多くのものはスポットレート（あるいは瞬間的フォワードレート）の時間変動を SDE によって記述している（古典的な研究としては [24], [25], [26], [27]等が良く知られている[11]）。またその際、説明変数としてイールドカーブの主成分やマクロ経済要因等のファクターを導入する事も可能であり、理論・実証の双方の観点から様々な研究がなされている（ [28], [29], [30]等）。

本稿でも、利子率過程を与えるための多次元ファクターを導入し、そのファクターの時間変動を SDE によって記述する事とする。即ち、mを自然数としてm次元実数空間値確率過程$X = (X_t)_t$が確率測度Pの下での次の SDE

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + \beta(X_t)dW_t^0,\ \ X_0 = x_0 \tag{7}$$

を満たすとし、r_tは決定論的関数$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$を用いて$r_t = f(X_t)$と表されるものとする[12]。ここで$\alpha: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ \beta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m'}$は$b, \sigma$と同様適切な数学的設定を満たす関数であり

---

9 死力あるいは対応するファクターの変動は実確率測度P_0の下で与えられるとするのが一般的であるが、価値評価のためのリスク中立確率測度を選択するクラスが技術的な仮定を満たしている場合、Girsanov の定理（あるいはその拡張）によって SDE をPの下でのものに書き換える事が可能であるため、ここでは初めからPの下での変動を定式化する事を考える。詳細は [1]の Appendix A,B を参照せよ。

10 例えばb, σがリプシッツ連続関数であるならば SDE (5) は一意的な解を持つ事が知られている（ [46] , [47]等）。

11 他、実際に市場で取引されている LIBOR 等に対するモデルを用いて金利過程を定式化する研究も知られている [49]。

12 スポットレートr自身をファクターの一部とみなす事も出来るため、この設定は Vasicek モデル [27]等の均衡モデルを内包するものとなっている。

（m'は自然数）、$x_0 \in \mathbb{R}^m$はファクターの初期値。また$W^0 = (W_t^0)_t$はm'次元標準ブラウン運動。

また [1]と同様、ここでは 2.3 節で導入したフィルトレーション$(\mathcal{G}_t)_t$が金融市場に関する情報をも内包しており、特にXは$(\mathcal{G}_t)_t$-適合と仮定する。この時、生存保険証券の現在価値は以下の様に計算する事が出来る。

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \sum_{x \in I} E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) E\left[1_{\{\tau^x > T\}} \mid \mathcal{G}_T\right]\right] G^x \\
&= \sum_{x \in I} E\left[\exp\left(-\int_0^T \left(f(X_t) + g(Y_t^x)\right) dt\right)\right] G^x
\end{aligned}
\tag{8}
$$

特に$h(x,y) = f(x) + g(y)$, $Z_t^x = (X_t, Y_t^x)$と置けば

$$
V_0 = \sum_{x \in I} E\left[\exp\left(-\int_0^T h(Z_t^x) dt\right)\right] G^x \tag{9}
$$

となり、ブラウン運動についてもW^0とW^xを同時に考える事によって金利と死力を区別する事無く価値評価を行う事が出来る。

3.　長期ランダマイズドシナリオの下での価値評価

3.1.　長期ランダマイズドシナリオの導入

前章において、 [1]や [31]で紹介されている生保リスク内包証券に関する一般的なフレームワークの下での現在価値評価式を導出した。しかし、長寿リスク内包証券において課題となるのは「満期時点Tが非常に大きい」という点である。即ち、前章で得た評価式(9)を用いて価値評価を行うためには、リスク中立確率測度P及びその下での各ファクターの変動を表す SDE(5),(7)の係数を求めなければならないが、十分長い時間が経過した後のファクターの値の持つ不確実性は非常に大きくなると考えるのが自然であり、(9)式の評価においては不確実性に関するリスクプレミアムが過度に含まれる、あるいは不正確な評価となってしまう可能性がある。

一方、価値評価を行う主体である保険会社は、将来の死力や生存率に関しての見通しを持っており、満期時点あるいはそれより前または後の時点におけるファクター等の分布をある程度推測あるいは特定出来ると考えられる。例えば、新薬の開発や伝染病の発生等により、将来時点における死力や生存率の増減に関して、既存の生命表等からだけでは推し量れない情報を得る事が出来るかもしれない。また同様に、長期金利に関しても政府や中央銀行の動向や実体経済の様相等による見通しを得る事がある程度可能である。また、人間を含む哺乳類の寿命に関しては生物学や遺伝学的な観点から細胞の分裂回数の限界に起因する「限界寿命」の存在が議論されており、人類が超える事は出来ないと考えられる限界寿命を考慮した保険数理モデルの提案もなされているが（ [32]等)、このような概念も(5)式の様な微分方程式だけでは表現が難しいものである。

上記で述べた見通しあるいは外生的制約条件は将来時点に対する確実性を伴った予測と

いうわけではなく無論不確実性を含むものであり、ランダムネスを伴うシナリオ、即ちランダマイズドシナリオと整理する事が出来る。数学的には、将来時点$\bar{T}$におけるランダマイズドシナリオとは$\mathbb{R}^N$上の確率測度（分布）を用いて与えられる。ここでNはシナリオを考える変数の次元を表している。例えば将来の利子率$r_{\bar{T}}$についてのシナリオであれば$N=1$とすれば良く、またはある特定の被保険者$x \in I$の死力を説明するd次元ファクターに対してであれば$N=d$となる。

本稿ではランダマイズドシナリオの下での確率過程の変動を［33]で提案された条件付確率微分方程式（以下 CSDE）によって記述し、長寿リスク内包証券価格評価に応用する事を考える。以下、「確率過程$L=(L_t)_t$が$\bar{T}$時点において確率分布νに従う」というランダマイズドシナリオを［33]に従って$(\bar{T},L,\nu)$と表す事とする[13]。

3.2. 条件付確率微分方程式の概要[14]

古典的 Wiener 空間$(\mathcal{C},\mathcal{B},\xi)$を考える。即ち$\mathcal{C}=C([0,\infty);\mathbb{R})$ は連続関数全体が成す空間であり$\mathcal{B}$は$\mathcal{C}$が生成する Borel 加法族、ξは Wiener 測度。また Wiener 空間上の座標関数を$B_t(w) \coloneqq w(t)$ によって定義し、$B=(B_t)_t$が生成するフィルトレーションを$(\mathcal{B}_t)_t$と表す。Lを$\mathbb{W} \coloneqq (\mathcal{C},\mathcal{B},(\mathcal{B}_t)_t,\xi)$上の$\mathbb{R}^N$値 Markov 過程とし、$\nu$は$\mathbb{R}^N$上の確率分布とする。また次の技術的仮定を置く。

(A1) $\mathrm{supp}\,\nu \subset \mathrm{supp}\,\xi \circ L_{\bar{T}}^{-1}$

(A2) $L^1\left(\mathbb{R}^N,\xi \circ L_{\bar{T}}^{-1}\right) \subset L^1(\mathbb{R}^N,\nu)$

(A3) Lは正値確率推移密度$p(s,z;t,y)$を持つ、即ち$P(L_t \in A\,|L_s=z)=\int_A p(s,z;t,y)dy$, $p(s,z;\ t,y)>0$（Aは任意の Borel 集合）

ここでsuppは分布の台（support）を表し、$L^1(\mathbb{R}^N,m)$は測度mの下で可積分な$\mathbb{R}^N$上の可測関数全体からなる空間である。

この時、各$y \in \mathbb{R}^N$に対して

$$\eta_t^y \coloneqq \frac{p\left(t,L_t;\bar{T},y\right)}{p\left(0,L_0;\bar{T},y\right)} \tag{10}$$

と定めれば、任意の$0 \le t < \bar{T}$と$\mathcal{B}_t$-可測有界確率変数Xに対して

$$E^{q(y,\cdot)}[X]=E^{\xi}\left[\eta_t^y X\right], \quad \xi \circ L_{\bar{T}}^{-1}-\mathrm{a.a.}\,y \tag{11}$$

が成立する事を直接計算によって確かめられる[15]。ここで$q(y,\cdot)$は$L_{\bar{T}}$を所与とした時の正則条件付確率分布であり、(11)式の左辺は直観的には$E^{\xi}[X\,|L_{\bar{T}}=y]$と書ける。(11)式に注意すると、$\xi \circ L_{\bar{T}}^{-1}$-ほとんど全ての$y$に対して$\eta^y=\left(\eta_t^y\right)_t$は初期値を1とするマルチンゲールであ

[13] [33]では conditioning と呼ばれており、また三つ組の与え方も$(\bar{T},L_{\bar{T}},\nu)$が対応する定義となっている。

[14] 本節の議論を行うためには確率解析学に関する知識がある程度必要となるが、直観的な理解のためには 3.2, 3.3 節を読み飛ばしても構わない。

[15] (10)式の代わりに(11)式を最初に仮定すれば、本節のほとんどの議論は、Lの状態空間が$\mathbb{R}^N$ではなくより一般の Polish 空間の場合でも成立する。

る事が分かる。

次に、$(\mathcal{C},\mathcal{B}_{\overline{T}})$上の確率測度$\xi^{\nu}$を次で定義する[16]。

$$\xi^{\nu}(A)=\int_{\mathbb{R}^N} q(y,A)\nu(dy),\quad A\in\mathcal{B}_{\overline{T}} \tag{12}$$

この時以下の性質が成り立つ事が容易に確認出来る。

- νはξ^{ν}の下での$L_{\overline{T}}$の確率分布。
- 任意の有界確率変数Xに対して$E^{\xi^{\nu}}\left[X\middle|L_{\overline{T}}\right]=E^{\xi}[X|L_{\overline{T}}]$が成立。
- 任意の$0<t<\overline{T}$に対して$(\mathcal{C},\mathcal{F}_t)$上で$\xi^{\nu}$ はξに対して絶対連続であり、次式が成立。

$$\left.\frac{d\xi^{\nu}}{d\xi}\right|_{\mathcal{F}_t}=\int_{\mathbb{R}^N}\eta_t^{y}\nu(dy) \tag{13}$$

本節の最後に、 [33]の最初の基本的な結果として与えられている CSDE を導出しておこう。[33]の Theorem14 により、$B_t(w)=w(t)$はある$(\mathcal{F}_t)_t$-適合過程$A=(A_t)_t$を用いて$(\mathcal{C},\xi^{\nu})$上のブラウン運動$B_t^{\nu}\coloneqq B_t-\int_0^t A_s ds$に変換される。ここで$A$の適合性から、ある$\mathbb{W}$上の可予測汎関数$\Phi:[0,\infty)\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$が存在して$A_t=F(t,B)$と表す事が出来るが、この時次の（weak form の）汎関数型 SDE

$$d\hat{B}_t^{\nu}=\Phi\left(t,\hat{B}^{\nu}\right)dt+dw_t,\qquad t<\overline{T},\quad \hat{B}_0^{\nu}=0 \tag{14}$$

が一意強解を持つならば[17]、ξ^{ν}はξの下での $\hat{B}^{\nu}$の分布に等しい事が容易に分かる。上の(14)式をランダマイズドシナリオ$(\overline{T},L,\nu)$が与えられた時の CSDE と呼ぶ。

上で構成した$\hat{B}^{\nu}$の持つ意味を考察するため、便宜上ξ^{ν}を$\xi(\cdot|L_{\overline{T}}\sim\nu)$ と表す事にする。ξ^{ν}は「確率変数$L_{\overline{T}}$の分布がνに等しい」というランダマイズドシナリオを与えた時の座標関数の分布を表すため、この表記は自然なものである。さて、今$L=B$とした時の上の測度変換を考えると、$t<T$に対して

$$\xi(B\in C\mid B_{\overline{T}}\sim\nu)=\xi^{\nu}(C)=\xi(\hat{B}^{\nu}\in C),\qquad C\in\mathcal{B}_t \tag{15}$$

となっている。即ち、「終端時刻$\overline{T}$の分布をνで条件付けた時のブラウン運動Bの$[0,\overline{T})$上における分布は$\hat{B}^{\nu}$に等しい」という事が分かる。ここで$\nu=\delta_0$とすれば$\Phi(t,w)=-w(t)/(\overline{T}-t)$となる事が分かり、よって元の古典的 Wiener 空間の上で

$$\hat{B}_t^{\nu}=-\int_0^{\mathrm{t}}\frac{\hat{B}_s^{\nu}}{\overline{T}-s}ds+B_t,\qquad t<\overline{T} \tag{16}$$

が成立する。この式は古典的なブラウン橋（Brownian bridge；ピン留めブラウン運動とも呼ばれる）に関する結果と同じである。よって CSDE(14)は既存のブラウン橋の一般化を与えていると解釈する事が出来る。即ち、$\nu=\ \delta_0$の下でシナリオ$B_{\overline{T}}\sim\nu$は$B_{\overline{T}}=0$, 即ち「ブラウン運動の終端時刻での値を0に固定する」という条件と同値となっており、$\hat{B}^{\nu}$は「初期時点と終端時点で値を0に固定した時のブラウン運動」を表すものとなっている。なお一般の

16 ξ^{ν}は最小確率測度と呼ばれる。名前の由来については [33], [19]等を参照せよ。

17 Φに標準的な一次増大条件があれば、Girsanov の定理と山田・渡辺の定理により(15)の解の「道ごとの一意性 (pathwise uniqueness)」の下で一意強解の存在を示す事が出来る。

（二乗可積分性を持つ）νに対しては次が成立する事を本節の最後に紹介しておく（ [33], Theorem 25)。

$$\hat{B}_t^\nu = -\int_0^t \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\hat{B}_s^\nu}{\overline{T}-s} \exp\left(\frac{y^2}{2\overline{T}} - \frac{\left(y-\hat{B}_s^\nu\right)^2}{2(\overline{T}-s)}\right)\nu(dy)}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{y^2}{2\overline{T}} - \frac{\left(y-\hat{B}_s^\nu\right)^2}{2(\overline{T}-s)}\right)\nu(dy)} ds + B_t \tag{17}$$

3.3.　Markov 型確率微分方程式への応用

本節の目標は、前節における一般論をフィルター付確率空間上の Markov 型 SDE の解に対する汎関数の期待値計算へと応用する事である。N次元確率過程 $Z=(Z_t)_t$を$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$上で与えられた次の確率微分方程式の一意強解とする。

$$dZ_t = \gamma(Z_t)dt + \Sigma(Z_t)dW_t,\ \ Z_0 = z_0 \tag{18}$$

ここでドリフト・拡散係数γ,Σに十分良い技術的条件があれば、$Z_{\overline{T}}$の分布は密度関数を持つ事が知られている（理論的な研究に関しては [34], [35], [36], [37]等を参照)。また、特にγ,Σが線形である場合には$Z_{\overline{T}}$の分布の密度関数を具体的に書き下す事も出来る。以下では Markov 過程Zの推移密度関数$p(s,x;t,y)$が存在し、（少なくともZの状態空間の上では）常に正値であると仮定する。以下、$T<\overline{T}$として所与の汎関数$H: C([0,T];\mathbb{R}^N)\to[0,\infty)$に対して[18]、$P$の下で「『$Z_{\overline{T}}$が$\nu$に従う』というランダマイズドシナリオを与えた時の」$H(Z)$の期待値を計算する事を考える。

まず前節の議論を適用出来るようにするために、変数変換によって$\mathbb{W}$上での議論に移行する。(18)式が一意強解を持つので、ある適合汎関数$\Psi: [0,\infty)\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$を用いて（ほとんど確実に）$Z_t=\Psi(t,W)$と表す事が出来る。この時$\hat{Z}_t \coloneqq \Psi(t,B)$として$E[H(Z)] = E\left[H\left(\Psi(\cdot,\mathrm{W})\right)\right] = E^{\xi}\left[H\left(\Psi(\cdot,B)\right)\right] = E^{\xi}\left[H\left(\hat{Z}\right)\right]$となる。そこで

$$E[H(Z)|\,Z_{\overline{T}}\sim\nu] \coloneqq E^{\xi}\left[H\left(\hat{Z}\right)\middle|\,\hat{Z}_{\overline{T}}\sim\nu\right] = E^{\xi^\nu}\left[H\left(\hat{Z}\right)\right] \tag{19}$$

と定義する。この時、前節の議論から

$$\begin{aligned} E^{\xi^\nu}\left[H\left(\hat{Z}\right)\right] &= E^{\xi}\left[\left.\frac{d\xi^\nu}{d\xi}\right|_{\mathcal{F}_T} H\left(\hat{Z}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^N} E^{\xi}\left[\eta_T^y H\left(\hat{Z}\right)\right]\nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} E^{\xi}\left[\frac{p\left(T,\hat{Z}_T;\,\overline{T},y\right)}{p\left(0,z_0\,;\,\overline{T},y\right)} H\left(\hat{Z}\right)\right]\nu(dy) \end{aligned} \tag{20}$$

となるが、再び$\hat{Z}$をZへと変数変換する事によって

$$E[H(Z)|\,Z_{\overline{T}}\sim\nu] = \int_{\mathbb{R}^N} E\left[\frac{p\left(T,Z_T;\,\overline{T},y\right)}{p\left(0,z_0\,;\,\overline{T},y\right)} H(Z)\right]\nu(dy) \tag{21}$$

が得られ、Wiener 空間を明示的に扱わなくともランダマイズドシナリオ条件付の期待値を計算する事が出来る。更に

---

[18] Hは必ずしも非負でなくとも良いが、積分の定義や順序交換（Fubini-Tonelli の定理）の利便性のためにここでは非負とした。

$$\zeta_T^\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{p(T, Z_T;\, \overline{T}, y)}{p(0, z_0\,;\, \overline{T}, y)} \nu(dy), \qquad P^\nu(A) = E[\zeta_T^\nu; A], \qquad A \in \mathcal{F}_T \tag{22}$$

と置けば$E[H(Z)|Z_{\overline{T}} \sim \nu] = E^{P^\nu}[H(Z)]$と表す事も出来る。即ち、「ランダマイズドシナリオ$(\overline{T}, Z, \nu)$で条件づけた上で$P$の下で期待値を取る」という事は「$P^\nu$の下で期待値を取る」事と同値であると言える。

ここで、 P^νの下でZが従う SDE を導出しておこう。適当な技術的仮定の下で、Zは$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P^\nu)$の下で以下の SDE の一意解である事を示す事が出来る。

$$dZ_t = (\gamma(Z_t) + \Sigma(Z_t)\Sigma(Z_t)^{\mathrm{T}}\phi(t, Z_t))dt + \Sigma(Z_t)dW_t^\nu,\ \ Z_0 = z_0 \tag{23}$$

ここで$W^\nu = (W_t^\nu)_t$はP^νの下でのブラウン運動であり、また

$$\phi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \log \int_{\mathbb{R}^N} \frac{p(t, x;\, \overline{T}, y)}{p(0, z_0\,;\, \overline{T}, y)} \nu(dy) \tag{24}$$

である。証明の方法はいくつかあるが、 [33]では$\mathbb{W}$上の(20)の解に対して Malliavin 解析（特に Malliavin の部分積分の公式）を適用している。 [19]では「マルチンゲール密度の直接計算」「Markov 橋を用いる方法」の二通りが紹介されている。(23)式を使えば、$E^{P^\nu}[H(Z)]$を計算する際に Monte Carlo シミュレーション等によってランダマイズドシナリオ下での期待値の数値計算を実行する事も可能である[19]。

以上をまとめると、$E[H(Z)|Z_{\overline{T}} \sim \nu]$の計算には以下の二通りの方法によって計算する事が出来る。

[方法 1] Zの推移密度関数$p(t, x; T, y) = dP(Z_T \le y\,|Z_t = x)/dy$ を用いて(21)式を計算。

[方法 2] (23)式に従うZに対して$H(Z)$の期待値を計算。

3.4. 長寿リスク内包証券価値評価への応用

以上によってランダマイズドシナリオ条件下での長寿リスク内包証券の現在価値評価式を導出する準備が整った。被保険者集団IがN人からなる場合を考えると、2.3, 2.4 節の議論から、評価すべき証券価格は、長期シナリオを考慮しない場合はあるN個のn次元確率過程$Z^i = (Z_t^i)_t$ $(i = 1, \dots, N)$と関数$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$を用いて

$$V_0 = E[C_T], \qquad C_T = \sum_{i=1}^N \exp\left(-\int_0^T h(Z_t^i)dt\right) G^i \tag{25}$$

の形で与える事が出来る。但し$G^i > 0$はi番目の被保険者の生存時に満期時点で支払われるペイオフ。また$Z = (Z^1, \dots, Z^N)$の時間変動は以下のような SDE によって記述される。

$$dZ_t = \gamma(Z_t)dt + \Sigma(Z_t)dW_t,\ \ Z_0 = z_0 \tag{26}$$

ここで$\gamma: \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}, \Sigma: \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN} \otimes \mathbb{R}^M$は（3.3 節の議論が行えるだけの十分な）数学的仮定を満たす関数であり、$W = (W_t)_t$はM次元標準ブラウン運動。ここでZ_t^iは第i被保険者に対

[19] SDE の解に対する汎関数の期待値の計算方法に関しては「計算ファイナンス」と呼ばれる分野において膨大な研究がなされており、それらを用いたより高度な数値計算も可能と考えられる。

応するファクターのt時点での値を表しているが、そのうち一つの成分は被保険者間で共通の金利に関するファクターである。上は金利と死力をまとめて一つの確率過程とした簡便な数式であるが、これらを区別して表記する場合には

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} E\left[\exp\left(-\int_0^T \left(f(X_t) + g(Y_t^i)\right)dt\right)\right] G^i \tag{27}$$

の表現を用いる事とする。ここで$X = (X_t)_t$は金利に関するファクター、$Y^i = \left(Y_t^i\right)_t$は死力に関するファクターである。また$f(X_t)$は$t$時点における瞬間的利子率（スポットレート）を、$g(Y_t^i)$は第$i$被保険者の死力をそれぞれ表している。

3.4.1.　ファクターに対するシナリオ

本節では記号の簡略化のために$d = nN$と置き、また$Z = \left(\tilde{Z}^1, \ldots, \tilde{Z}^d\right)$と表す。適切な仮定の下で$Z$は正の推移密度関数$p(s, x; t, y)$を持つ。

まず全ての、あるいは一部のファクターに対する長期ランダマイズドシナリオによる CSDE を考える。即ち、将来時点$\overline{T}$において$(\tilde{Z}_{\overline{T}}^{i_1}, \ldots, \tilde{Z}_{\overline{T}}^{i_k})$ $(i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, N\})$ の分布がμとなるようなシナリオを考える。3.2, 3.3 節の議論を用いるためにはこれを「d次元確率変数$Z_{\overline{T}}$の分布」に変換する必要があるが、それには$p_i(x)$を$\tilde{Z}_{\overline{T}}^i$の密度関数として

$$\nu(dy) = \frac{p\left(0, z_0; \overline{T}, y\right)}{p_{i_1}(y^{i_1}) \cdots p_{i_k}(y^{i_k})} \mu\left(dy^{i_1} \cdots dy^{i_k}\right), \qquad y \in \mathbb{R}^d \tag{28}$$

とすれば良い。

シナリオを与える時刻$\overline{T}$が証券の満期Tよりも未来である、即ち$T < \overline{T}$である場合には、(21)式を用いて

$$\begin{aligned} E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right] &= \int_{\mathbb{R}^d} E\left[\frac{p\left(T, Z_T;\, \overline{T}, y\right)}{p\left(0, z_0\,;\, \overline{T}, y\right)} C_T\right] \nu(dy) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} E\left[\frac{p\left(T, Z_T;\, \overline{T}, y\right)}{p_{i_1}(y^{i_1}) \cdots p_{i_k}(y^{i_k})} \exp\left(-\int_0^T h\left(Z_t^i\right)dt\right)\right] \mu\left(dy^{i_1} \cdots dy^{i_k}\right) G^i \end{aligned} \tag{29}$$

で与えられる。$\overline{T} \le T$の時は少し注意が必要である。まず、シナリオを考慮しない元のリスク中立確率測度Pの下で、Zの Markov 性を使って

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{i=1}^{N} E\left[\exp\left(-\int_0^{\overline{T}} h\left(Z_t^i\right)dt\right) \exp\left(-\int_{\overline{T}}^{T} h\left(Z_t^i\right)dt\right)\right] G^i \\ &= \sum_{i=1}^{N} E\left[\exp\left(-\int_0^{\overline{T}} h\left(Z_t^i\right)dt\right) E\left[\exp\left(-\int_{\overline{T}}^{T} h\left(Z_t^i\right)dt\right) \mid Z_{\overline{T}}\right]\right] G^i \end{aligned} \tag{30}$$

と書き換えられる事に留意すれば、ランダマイズドシナリオ下の証券価格は

$$E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right] = \sum_{i=1}^{N} E^{\nu}\left[\exp\left(-\int_0^{\overline{T}} h\left(Z_t^i\right)dt\right)\right] A^i G^i \tag{31}$$

とするのが自然である。ここで$E^{\nu} = E^{P^{\nu}}$とした。また

$$A^i = E\left[\exp\left(-\int_0^{T-\overline{T}} h(\hat{Z}_t^i)dt\right)\right] \tag{32}$$

であり、$\hat{Z} = (\hat{Z}_t)_t$は以下の SDE の解。

$$d\hat{Z}_t = \gamma(\hat{Z}_t)dt + \Sigma(\hat{Z}_t)dW_t,\ \ \hat{Z}_0 \sim \nu \tag{33}$$

つまり、$\hat{Z}$はZの初期値をνに置き換えたものに相当する。ここで、CSDE は$t < \overline{T}$なるtに対してしか定義する事が出来ず、被積分関数の中に$\overline{T}$時点における情報が含まれている時には必ずしも計算が実行出来るとは限らないが、今の場合は積分の連続性から被積分関数は$\mathcal{F}_{\overline{T}-} \coloneqq \sigma\left(\bigcup_{t<\overline{T}}^{\infty} \mathcal{F}_t\right)$-可測になっており、$p(s,x;t,y)$に関する適切な条件の下で

$$E^\nu\left[\exp\left(-\int_0^{\overline{T}} h(Z_t^i)dt\right)\right] = \lim_{T'\nearrow\overline{T}} E^\nu\left[\exp\left(-\int_0^{T'} h(Z_t^i)dt\right)\right] \tag{34}$$

となる事に注意。

3.4.2. スポットレート・死力に対するシナリオ

次に、将来時点におけるスポットレート$f(X_{\overline{T}})$あるいは第i被保険者の死力$g(Y_{\overline{T}}^i)$に対するランダマイズドシナリオを考える。ここでは簡単のためスポットレートに関するシナリオのみを紹介し、更にXと$(Y^1,\dots,Y^N)$は独立であると仮定する。この場合

$$V_0 = E\left[\exp\left(-\int_0^T f(X_t)dt\right)\right]\sum_{i=1}^N E\left[\exp\left(-\int_0^T g(Y_t^i)dt\right)\right]G^i \tag{35}$$

となり、金利リスクと生保リスクの議論を分離して行う事が可能となる。

今、金利ファクターが(7)式に従うとし、更にランダマイズドシナリオ$(\overline{T}, f(X_{\overline{T}}), \mu)$を考える。ここで、$(X_{\overline{T}}, f(X_{\overline{T}}))$の結合分布が退化するのを避けるため、$W^0$とは異なるブラウン運動 $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_t$ を用意して$f(X_t)$に摂動を加える。即ち、$0 < \varepsilon \ll 1$として$F_t^\varepsilon = f(X_t) + \varepsilon\widetilde{W}_t$と置き、$(X_{\overline{T}}, F_{\overline{T}}^\varepsilon)$に対する密度関数及びランダマイズドシナリオを考える。伊藤の公式から$(F_t^\varepsilon)_t$は次の SDE に従う事が容易に分かる。

$$\begin{aligned} dF_t^\varepsilon = &\sum_{i=1}^m \left(\alpha^i(X_t)\frac{\partial f}{\partial x^i}(X_t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m (\beta(X_t)\beta(X_t)^{\mathrm{T}})^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_t)\right)dt \\ &+ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m'} \beta(X_t)^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}(X_t)dW_t^{0,j} + \varepsilon d\widetilde{W}_t \end{aligned} \tag{36}$$

これより$(m+1)$次元 Markov 過程$(X_t, F_t^\varepsilon)_t$が満たす SDE から$(X_{\overline{T}}, F_{\overline{T}}^\varepsilon)$の推移確率密度関数を導出し、(28)式と同様に$(X_{\overline{T}}, F_{\overline{T}}^\varepsilon)$に対する分布$\nu$を$F_{\overline{T}}^\varepsilon \sim \mu$となるように与え、(29)式と同様の議論を行えば、$T < \overline{T}$ の時形式的に

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T f(X_t)dt\right) \mid f\left(X_{\overline{T}}\right) \sim \mu\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{m+1}} E\left[\frac{p_{X,F^\varepsilon}\left(T,(X_T,F_T^\varepsilon);\ \overline{T},(x,\tilde{x})\right)}{p_{X,F^\varepsilon}\left(0,\left(x_0,f(x_0)\right);\ \overline{T},(x,\tilde{x})\right)}\exp\left(-\int_0^T F_t^\varepsilon dt\right)\right]\nu(dxd\tilde{x}) \tag{37}$$

となる[20]。但しp_{X,F^ε}は$(m+1)$-次元 Markov 過程(X,F^ε)に対する推移密度関数。$\overline{T}\le T$の時は(31),(34)式と同様の議論を行えば良い。

3.4.3. 生存率に対するシナリオと限界寿命への応用

生保リスクに関する長期的なシナリオとしては、将来の死力自体よりも寧ろ生存率（あるいは死亡率）に関するものを与える方が自然と言えるかもしれない。ここでは [38]におけるT時点までの生存率

$$L_T^i := \exp\left(-\int_0^T g\left(Y_t^i\right)dt\right) \tag{38}$$

に対するランダマイズドシナリオを考える。数式が相当に煩雑となってしまうためにここでも金利リスクと生保リスクの間の独立性を仮定し、また第1被保険者の生存率に対してのみシナリオμを考慮する事にする。この場合も基本的な考え方は 3.4.2 節と同じであり、伊藤の公式によりL^1が従う SDE を導き（必要に応じてやはりWとは異なるブラウン運動を導入して$(L_t^1)_t$に摂動を加え）、それを用いて$(Y_T^1,\dots,Y_T^N,L_T^1)$の同時分布$\nu$を与えて

$$E\left[C_T \mid L_T^1 \sim \nu\right] = E\left[\exp\left(-\int_0^T f(X_t)dt\right)\right]$$
$$\times\left\{\int_{\mathbb{R}^{N+1}} E\left[\frac{p_{Y,L^1}\left(T,(Y_T,L_T^1);\ \overline{T},(y,l)\right)}{p_{Y,L^1}\left(0,(y_0,1);\ \overline{T},(y,l)\right)}\exp\left(-\int_0^T g(Y_t^1)dt\right)\right]\nu(dydl)G^1\right. \tag{39}$$
$$\left.+E\left[\sum_{i=2}^N \exp\left(-\int_0^T g(Y_t^i)dt\right)G^i\right]\right\}$$

とすれば良い（$T<\overline{T}$の時)。

ここで、生存率に対するシナリオの例として、3.1 節で触れた限界寿命の概念の導入を考えてみよう。今、$\overline{T}$が人類の限界寿命であるとすると、$\overline{T}$時点において全ての被保険者の生存率は0になっていると考えられる。しかし、(38)式で与えられている生存率は指数関数の形状をしているために“全ての$i\in I$に対して$L_{\overline{T}}^i=0$”というシナリオを立てる事は出来ない。そこで、ランダマイズドシナリオを用いて以下のようにして「限界寿命を考慮した時の長寿リスク内包証券の価格」を与える事を考える。即ち、$\varepsilon>0$に対してμ_εを区間$(0,\varepsilon)$に台を持つような確率分布とし、$\nu_\varepsilon=\mu_\varepsilon\otimes\cdots\otimes\mu_\varepsilon$（$N$次元直積）として

---

[20] $\varepsilon\to 0$の下での収束性に関する議論は今後の課題の一つである。

$$V_0^\varepsilon := E\left[C_T \mid (L_{\overline{T}}^1, \dots, L_{\overline{T}}^N) \sim \nu_\varepsilon\right] \tag{40}$$

と定めれば、これは「$\overline{T}$においていずれの被保険者の生存率もε未満になるようなシナリオの下での証券価値」を表している。そこで$\hat{V}_0 := \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} V_0^\varepsilon$とすれば、これは限界寿命の下での証券価値の保守的な評価の一つとなっていると考えられる。$\hat{V}_0$がμ_εの与え方に拠らないかどうかは自明ではないが、数値計算によってμ_εの与え方に対する頑健性を調べる事は今後の課題の一つである。

なお上で与えたいくつかの証券価値評価式を具体的に求める際の計算負荷は一般に小さくない[21]。SDE の解の密度関数に対する近似計算の手法に関しては様々な研究がなされているが、例えば漸近展開を用いたものとして [39]（Malliavin 解析によるアプローチ）や [40]（鞍点法によるアプローチ）がある。

4.　ストレステストと長寿リスクの定量的管理・計測

4.1.　長期ランダマイズドシナリオとストレステスト

前章では「保険会社の持つ将来の見通し」を証券価格に反映させるために、ランダマイズドシナリオ下での証券価格評価手法を提案した。ここでは、将来の長期シナリオとして保険会社の持つ平均的な推測ではなく「低頻度で生じると考えられるカタストロフィックなシナリオ（ストレスシナリオ)」を与えた下で同様の証券価格評価を行う事によるストレス時におけるリスク評価（ストレステスト）への応用を考える。

具体的には、将来時点$\overline{T}$におけるファクター値（あるいは生存率等）の分布として「正常時における見通し」に対応するものをνとし、「ストレスシナリオ発現時」のものを$\hat{\nu}$とすれば、各々のシナリオにおける証券価格の差[22]

$$\begin{aligned}\mathrm{UL}(\hat{\nu};\nu) &:= -\left(E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \hat{\nu}\right] - E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right]\right) \\ &= -E^{P^{\hat{\nu}}}[C_T] + E^{P^{\nu}}[C_T]\end{aligned} \tag{41}$$

はある種の非期待損失（Unexpected Loss; UL）を与えるものであり、長寿リスク内包証券のリスク量として捉える事が出来る。

3.3 節で述べたように、ランダマイズドシナリオを考えるという事は結果的には「リスク中立測度Pを異なる確率測度P^νに変換する」という事と同値であり、即ち将来の不確実性に対するリスクシナリオは数学的には確率測度によって表現が可能であると考えられる。ストレステストの観点からすると、保険会社は自身のリスクプロファイルと共に今後起こり得る金融クライシスやパンデミック等に鑑みて「妥当な$P^{\hat{\nu}}$を選択してストレス時に備える」事が重要となる。

---

[21] ファクター過程がガウス過程として与えられる場合には、νを正規分布や指数分布、ガンマ分布等で与えた時の証券価格を陽的に計算する事が可能である事が多い（具体例については [19]を参照せよ)。

[22] 損失額ベースで計量するために符号を反転させている。

4.2.　コヒーレントリスク尺度とストレスシナリオ

ストレス時確率測度を用いたリスク管理・ストレステストの考え方は、コヒーレントリスク尺度を用いたリスク計量の議論と親和性が高い。リスク尺度とは数学的には「(ランダムな値を取る）確率変数を（ランダムでない）実数に変換する写像」として定義され、その中でも劣加法性等の「リスク尺度として望ましいと思われる性質」のいくつかを満たしているものをコヒーレントリスク尺度と呼ぶ [41]。コヒーレントリスク尺度の中で最も代表的なものに条件付バリュー・アット・リスク（Conditional Value-at-Risk; CVaR)[23]があり、ソルベンシーII においても意識されている。実は適当な技術的仮定を満たすコヒーレントリスク尺度ρは、確率測度達からなるある集合$\mathcal{Q}$を用いて

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^{Q}[X] \tag{42}$$

と書ける事が知られている [42] [43]。ここでXは将来の損失額を表す確率変数。上式の右辺は「$\mathcal{Q}$の中からQを任意に選んだ時の$E^{Q}[X]$の上限値」を表すものであり、もし最大値を達成するような$Q^* \in \mathcal{Q}$が存在するならば、それは$\mathcal{Q}$という「シナリオセット」の中から選択したストレスシナリオ（に対応する確率測度）として特徴付ける事が出来る。

ストレス時確率測度の選択は、上記の通り保険会社によって定性面も考慮したビルディングブロックな手法によって行う事も考えられるが、近年の定量的リスク管理における研究に基づいた、ある種のコヒーレントリスク尺度を用いてストレス時確率測度を与える「理論的ストレステスト」の利用も考えられる。即ち、コヒーレントリスク尺度ρの下で長寿リスク内包証券のペイオフの割引価値C_Tに対してリスク量$\rho(-C_T)$を計測した際、(42)式においてシナリオセット$\mathcal{Q}$の中からsupを与える確率測度$\hat{Q}$を構成出来たならば、これをストレス時の確率測度と捉えて(42)式と同様に

$$\begin{aligned} \mathrm{UL}(\hat{Q}; \nu) &= -\left(E^{\hat{Q}}[C_T] - E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right]\right) \\ &= \rho(-C_T) + E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right] \end{aligned} \tag{43}$$

を計測する事でストレステストへと役立てる事も可能であり、また$\hat{Q}$に対する解釈を定性面の判断へと利用出来る可能性もある。逆に、(41)と(43)の二つの UL を比較する事により、ストレス時における見通し$\tilde{\nu}$を与えた際の対応するストレス時確率測度$P^{\tilde{\nu}}$が理論的にどの程度保守的な見積もりとなっているのかを推し量る事が出来るかもしれない（4.4 節において改めて議論する)。

4.3.　条件付バリュー・アット・リスクとストレスシナリオ

本節では上で述べたリスク尺度 CVaR の性質について紹介する。まず CVaR の数学的な定義を与えておこう。損失額を表す確率変数X及び分位点$\alpha \in (0,1)$に対して、$\alpha \times$ 100%-CVaR は次の式で定義される。

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(X) = E^{P_0}[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_{\alpha}(X)] \tag{44}$$

[23] 期待ショートフォール（Expected Shortfall; ES）等とも呼ばれる。

ここで$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$は$\alpha \times 100\%$-バリュー・アット・リスク（Value-at-Risk; VaR）と呼ばれ、次で定義される[24]。

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{y \in \mathbb{R}\,; P_0(X \le y) \ge \alpha\} \tag{45}$$

上の定義はやや煩雑なものであるが、もしXの分布関数（累積密度関数）F_Xが逆関数F_X^{-1}を持つ場合には$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$と表す事が出来る。上が意味するところは「損失額$X$が$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$を超える確率は$1-\alpha$」という事であり、通常$\alpha$は1に近い値が用いられる。CVaRは「$X$が$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$を超えるような大規模損失となる」という条件付の期待損失額を表しており、VaR よりも保守的な（即ち$\mathrm{VaR}_\alpha(X) \le \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$を満たす）リスク尺度となる。

リスク尺度として$\rho = \mathrm{CVaR}_\alpha$を選択した時の(42)式におけるシナリオセット$\mathcal{Q}$は次の様に表す事が出来る［43]。

$$\mathcal{Q}_\alpha = \left\{ Q \in \mathcal{P}\,;\ {}^{\exists}\frac{dQ}{dP_0} \le \frac{1}{1-\alpha}\ \text{ a.s.} \right\} \tag{46}$$

ここで$\mathcal{P}$は確率測度全体からなる集合。そして、損失額確率変数Xを与えた時に(42)式の最大値を与えるストレスシナリオを特徴付ける確率測度は$Q_\alpha = P_0(\cdot \mid X \ge \mathrm{VaR}_\alpha(X))$，即ち「損失額が VaR を超える」という事象の下での条件付確率となる。これは即ち「VaR 以上の損失額が出るようなシナリオのみを考え、各シナリオに対する『重み付け』は変更しない」という比較的単純なストレス時確率測度の構成を行っていると言える。

4.4. エントロピー・バリュー・アット・リスクを用いたストレスシナリオ

近年、CVaR よりも保守的となるようなコヒーレントリスク尺度としてエントロピー・バリュー・アット・リスク（Entropy Value-at-Risk; EVaR）と呼ばれるリスク尺度が提案され、研究が進んでいる［44]［45]。これはエントロピーリスク尺度と呼ばれる凸リスク尺度のコヒーレント版とも言えるものであり、以下で定義される。

$$\mathrm{EVaR}_\alpha(X) = \sup_{Q \in \mathcal{H}_\alpha} E^Q[X] \tag{47}$$

ここで$\mathcal{H}_\alpha$は次で定義される確率測度の集合。

$$\mathcal{H}_\alpha = \{Q \in \mathcal{P} \mid H(Q \,||\, P_0) \le -\log(1-\alpha)\} \tag{48}$$

$H(Q \,||\, P_0) = E^Q\left[\log\frac{dQ}{dP_0}\right]$は相対エントロピーと呼ばれる概念であり、確率測度$P, Q$間の「距離」に似た概念である（距離の公理を満たしていないため、厳密には距離では無い）。EVaRはコヒーレントリスク尺度の性質を満たす事が示されており、また$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) \le \mathrm{EVaR}_\alpha(X)$の関係が一般に成り立つ事を容易に示す事が出来る。

今、Xが指数モーメント条件$E^{P_0}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty\ (\lambda > 0)$を満たす時、(47)式の$\sup$を実現するス

[24] 金融機関に対する自己資本比率規制（Basel III）では、いくつかのリスクカテゴリーに対して「1000 年に一度発生し得る最大損失額」の計量が求められているが、これは$\alpha = 0.999$の時、即ち99.9%-VaR を意味している。

トレス時確率測度 $\hat{Q}_\alpha$を次のように与える事が出来、またこの時$H\left(\hat{Q}_\alpha \,||\, P_0\right) = -\log(1-\alpha)$を満たしている事が分かる。

$$\hat{Q}_\alpha(A) = \frac{1}{E^{P_0}\left[e^{\theta_\alpha X}\right]} E^{P_0}\left[e^{\theta_\alpha X}\,; A\right],\ \ A \in \mathcal{F} \tag{49}$$

但しθ_αは次の最小値を実現するθである。

$$\min_\theta \frac{\log E^{P_0}\left[e^{\theta X}\right] - \log(1-\alpha)}{\theta} \tag{50}$$

長寿リスク内包証券価格に対する UL (41)において、ストレス時ランダマイズドシナリオ$(\overline{T}, L, \hat{\nu})$に対応する確率測度$P^{\hat{\nu}}$は、その作り方から一般に適当な$\alpha$に対して CVaR で用いられるシナリオセット$\mathcal{Q}_\alpha$（(46)式）に含まれているとは限らない。一方、$P_0$と$P^{\hat{\nu}}$の相対エントロピーを計測し、$\alpha$がいくつの時に$P^{\hat{\nu}} \in \mathcal{H}_\alpha$となるかを調べる事によって「ストレス時シナリオが対応するαの水準」を捕捉する事が出来る。即ち、EVaR という理論的な道具（リスク尺度）を用いて、ストレスシナリオ策定者の保守性の目安をパラメーターαによってある程度推し量る事が可能と言える。そして更に、(49)式によってストレス時確率測度を与える事により、EVaR の下での理論的ストレステストを行って保守的な UL を見積もる事も考えられる。具体的な計算手順は以下の通り。

[手順 1] ストレスシナリオ $\hat{\nu}$ に対応する信頼水準$\hat{\alpha}$を以下の式により推計する。

$$\hat{\alpha} = \inf\left\{\alpha \in (0,1)\,;\, P^{\hat{\nu}} \in \mathcal{H}_\alpha\right\} \tag{51}$$

[手順 2] 上記の信頼水準の下で EVaR ベースのリスク量を用いて UL を計算する。

$$\mathrm{UL}^e(\hat{\nu};\nu) := \mathrm{EVaR}_{\hat{\alpha}}(-C_T) + E\left[C_T \mid Z_{\overline{T}} \sim \nu\right] \left(\geq \mathrm{UL}(\hat{\nu};\nu)\right) \tag{52}$$

5.　まとめ

本論文では長寿リスク内包証券の現在価値評価において、統計的モデルだけでは記述が難しい長期的なランダマイズドシナリオを証券価格に反映させるため、CSDE を用いた手法の提案を行い、またストレステストへの応用やいくつかのリスク尺度との関係について議論した。

今後の課題として以下が挙げられる。

(1) CSDE に対する数値計算手法の構築

3.3, 3.4 節で紹介した CSDE の計算方法は、リスクファクターや金利、生存率等に対する SDE が線形である場合（即ちファクター等がガウス過程となる場合）を除き、[方法 1][方法 2]共に計算負荷が高く、特に多次元モデルに対する数値計算を現実的な時間で実行する事は非常に困難である。3.4 節の最後で述べた通り、計算ファイナンスにおける理論、特に密度関数に対する漸近展開法を援用した具体的な数値計算手法の確立は重要な課題の一つである。

(2) 複数時点におけるランダマイズドシナリオ

ストレステストにおいて、長期的なシナリオを作成する際にはそのストーリー性が重要

であると言われている。例えば、インフルエンザ等のパンデミックに関するシナリオを作成する場合、「時点 1 においてインフルエンザが発生し死亡率が上昇する」というだけでなく、その後「時点 2 においてワクチンが作られたために死亡率上昇が抑制される」「時点 3 においてウィルスの変異による更なる死亡率上昇が起こる」等といった、複数時点におけるイベントに対するシナリオを考えるべきだと言える。

複数時点におけるランダマイズドシナリオ自体は、その時点の数だけ CSDE の議論を繰り返せば、対応する確率測度を構築する事が理論的には可能だが大変煩雑となってしまうため、具体的に計算を行うのは困難である。(1)の課題と合わせ、効率的な近似計算方法を構築する事が望ましい。

(3) 証券価格の動的モニタリング

本研究では長寿リスク内包証券価格の現時点$t = 0$における価格評価のみを対象としたが、時間の経過と共に証券価格は変化する。そして、価値評価に用いるシナリオについても時間の経過と共にその分布は動的に変化していくものと考えられる[25]。

標準的なリスク中立化法においては、将来時点$t > 0$における（不確実性を伴う）証券価格はリスク中立確率測度の下での条件付き期待値として与える事が出来るが、ランダマイズドシナリオの動的な変化を考慮した場合、対応する確率測度自体も時間と共に変化する無限次元空間値の確率過程となってしまう。難易度の高い課題ではあるが、シナリオの変動を考慮した CSDE の理論構築は長寿リスク管理高度化における重要なテーマである。

(4) 一般化 EVaR のストレステストへの応用

4.4 節において、保守的なコヒーレントリスク尺度である EVaR を用いたストレステストを提案した。EVaR が適用可能な確率変数は指数モーメントが有限となるものに限られており、本研究で主に対象とした生存保険型の商品の場合はペイオフ関数が有界であるために EVaR を適用出来たが、保険商品の種類によっては有界性が崩れ、指数モーメントが発散するようなよりファットテールな分布を持つ確率変数に対する EVaR 型のコヒーレントリスク尺度を用いる必要性が生じる。

そのような EVaR の一般化として、EVaR のシナリオセットに現れる相対エントロピーを Tsallis のエントロピーや Renyi のエントロピーに置き換えたコヒーレントリスク尺度に関する研究が近年始められており、長寿リスクストレステストへの応用に関する今後の研究の進展が期待される。

謝辞

本論文の執筆にあたり、数多くの有益な助言をいただいた大阪大学大学院基礎工学研究科の関根順教授と明治安田生命保険相互会社の渡辺涼平氏に深く感謝致します。

---

[25] 例えばまだ十分に解明されていない病気に関するシナリオを与える際、科学技術の発展と共にその原因や対処方法が明らかにされていく中で生存率への影響度も変化していくため、それに合わせてシナリオの分布も変化させていくのが自然と考えられる。

参照文献

[1] E. Biffis , P. Millossovich, “A bidimensional approach to mortality risk,” Decisions in Economics and Finance, 29, 71-96, 2006.

[2] F. Delbaen , W. Schachermayer, “A general version of the fundamental theorem of asset pricing,” Mathematische Annalen, 300, 463-520, 1994.

[3] M. J. Harrison , S. R. Pliska, “A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets,” Stochastic Processes and their Applications, 15, 313-316, 1983.

[4] M. J. Harrison , S. R. Pliska, “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets,” Stochastic Processes and their Applications, 11, 215-260, 1981.

[5] K. Takaoka , M. Schweizer, “A note on the condition of no unbounded profit with bounded risk,” Finance and Stochastics, 18, 393-405, 2014.

[6] I. Karatzas , S. E. Shreve, Methods of Mathematical Finance, Springer-Verlag New York, LLC, 1998.

[7] 関根順, 数理ファイナンス, 培風館, 2007.

[8] S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer-Verlag New York, LLC, 2004.

[9] H. Föllmer , M. Schweizer, “Hedging of contingent claims under incomplete information,” Applied Stochastic Analysis, eds. M.H.A. Davis and R.J. Elliott, Stochastics Monographs, 5, 389-414, 1991.

[10] M. Schweizer, “On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition,” Stochastic Analysis and Applications, 13(5), 573-599, 1995.

[11] H. U. Gerber , E. Shiu, “An actuarial bridge to option pricing,” Securitization of Insurance Risk, 45-62, 1995.

[12] S. S. Wang, “A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks,” Journal of Risk and Insurance, 67(1), 15-36, 2000.

[13] S. S. Wang, “A universal framework for pricing financial and insurance risks,” ASTIN Bulletin, 32, 213-234, 2002.

[14] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer , C. Stricker, “Exponential hedging and entropic penalties,” Mathematical Finance, 12(2), 99-123, 2002.

[15] T. Fujiwara , Y. Miyahara, "The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes," Finance and Stochastics, 7(4), 509-531, 2003.

[16] D. Becherer, "Rational hedging and valuation of integrated risks under constant absolute risk aversion," Insurance: Mathematics & Economics, 1, 1-28, 2003.

[17] T. Arai, "Good deal bounds induced by shortfall risk," SIAM Journal on Financial Mathematics, 2(1), 1-21, 2011.

[18] T. Arai , M. Fukasawa, "Convex risk measures for good deal bounds," Mathematical Finance, 24(3), 464-484, 2014.

[19] 渡辺涼平, "条件付き確率微分方程式を用いた保険リスク評価へのアプローチ," 平成26年度大阪大学大学院基礎工学研究科修士論文, 2015.

[20] D. Duffie , K. J. Singleton, Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management, Princeton University Press, 2003.

[21] A. Renshaw , S. Haberman, "Mortality reduction factors incorporating cohort effects," Actuarial Research Paper No.160, 2005.

[22] A. J. G. Cairns, D. Blake , K. Dowd, "Modelling and management of mortality risk: a review," Scandinavian Actuarial Journal, 2008(2-3), 79-113, 2008.

[23] A. J. G. Cairns, D. P. Blake, K. Dowd, G. Coughlan , D. Epstein, "A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States," Working paper, Heriot-Watt University, and Pensions Institute Discussion Paper PI-0701, 2007.

[24] J. C. Cox, J. E. Ingersoll , S. A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," Econometrica, 53(2), 385-408, 1985.

[25] D. Heath, R. Jarrow , A. Morton, "Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation," Econometrica, 60(1), 77-105, 1992.

[26] J. Hull , A. White, "Pricing interest-rate-derivative securities," The Review of Financial Studies, 3(4), 573-592, 1990.

[27] O. Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure," Journal of Financial Economics, 5, 177-188, 1977.

[28] Q. Dai , K. Singleton, "Term structure dynamics in theory and reality," The Review of Financial Studies, 16(3), 631-678, 2003.

[29] F. X. Diebold , C. Li, "Forecasting the term structure of government bond yields," Journal of Econometrics, 130, 337-364, 2006.

[30] F. A. Longstaff , E. S. Schwartz, "Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model," The Journal of Finance, 47(4), 1259-1282, 1992.

[31] 石坂元一, "生保リスクの証券化 ―死亡率リスクの証券化―," 生命保険論集第 159 号, 2006.

[32] N. Yokoo, "Evaluation of uncertainty risk of the limit life by Brownian-bridge mortality model," Conference Paper, AFIR/ERM Colloquium, 2013.

[33] F. Baudoin, "Conditioned stochastic differential equations: Theory, examples, and application to finance," Stochastic Processes and their Applications, 100, 109-145, 2002.

[34] N. Bouleau , F. Hirsch, Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space, Walter de Gruyter, 1991.

[35] S. Kusuoka, "Existence of densities of solutions of stochastic differential equations by Malliavin calculus," Journal of Functional Analysis, 258, 758-784, 2010.

[36] S. Kusuoka , D. Stroock, "Application of the Maliavin calculus, part I," Proceedings of the Taniguchi Intern. Symp. on Stochastic Analysis, Kyoto and Katata, 271-306, 1982.

[37] 重川一郎, 確率解析, 岩波書店, 1998.

[38] A. J. G. Cairns, D. Blake , K. Dowd, "Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk," ASTIN Bulletin, 36, 79-120, 2006.

[39] A. Takahashi , T. Yamada, "An asymptotic expansion with push-down of Malliavin weights," SIAM Journal on Financial Mathematics, 3(1), 95-136, 2012.

[40] T. Kato, J. Sekine , K. Yoshikawa, "Order estimates for the exact Lugannani-Rice expansion," Preprint, 2013.

[41] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber , D. Heath, "Coherent measures of risk," Mathematical Finance, 9(3), 203-228, 1999.

[42] F. Delbaen, "Coherent risk measures on general probability spaces," Advances in Finance and Stochastics, Essays in Honour of Dieter Sondermann, 1-37, 2000.

[43] H. Föllmer , A. Schied, Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time (3rd. edition), Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[44] T. Breuer , I. Csiszár, "Systematic stress tests with entropic plausibility constraints," Journal of Banking & Finance, 37, 1552-1559, 2013.

[45] H. Föllmer , T. Knispel, "Entropic risk measures: Coherence vs. convexity, model

ambiguity and robust large deviations,” Stochastics and Dynamics, 11, 333-351, 2011.

[46] 長井英生, 確率微分方程式, 共立出版, 1999.

[47] I. Karatzas , S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus (Second Edition), Springer, 1991.

[48] 森本祐司, “金融と保険の融合について,” 日本銀行金融研究所『金融研究』, 19 (別冊 1), 289-342, 2000.

[49] A. Brace, D. Gatarek , M. Musiela, “The market model of interest rate dynamics,” Mathematical Finance, 7(2), 127-155, 1997.