Value at Risk の劣加法性に関する一考察

Yuri Imamura * Takashi Kato †

March 23, 2024

1 Introduction

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数、即ち Ω 上で定義された実数値 $\mathcal{F}$-可測関数全体を $L(\Omega)$ と表す事にする。本稿では確率変数を「不確実性を伴う損失額」と捉える (つまり、正の値が損失に、負の値が利益に対応する)。この時、$X \in L(\Omega)$ のリスク量として実数値を対応させる写像がリスク尺度である[1]。

$$\rho : L(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

金融リスク管理における標準的なリスク尺度として value at risk (VaR) が知られている。確率変数 X に対して、信頼水準 $\alpha \in (0,1)$ における VaR は次のように定義される。

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \ ; \ F_X(x) \geq \alpha\}$$

但し、$F_X(x)$ は X の分布関数

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

を表す (他の確率変数に対しても同様の記号を用いる)。なお、$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ は F_X の左連続な一般化逆関数と同一のものである[2]。VaR は金融リスク管理実務においても汎用的に使われるリスク尺度であるが、欠点の一つとして「劣加法性 (subadditivity) を持たない」という指摘がなされている。ここでリスク尺度 ρ が劣加法的とは、任意の確率変数 X, Y に対して以下が成り立つ時の事を言う。

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \tag{1.1}$$

*Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa, Ishikawa 920-1192, Japan, E-mail: `imamuray@se.kanazawa-u.ac.jp`

†Association of Mathematical Finance Laboratory (AMFiL), 2–2–15, Minamiaoyama, Minato, Tokyo 107-0062, Japan, E-mail: `takashi.kato@mathfi-lab.com`

[1] リスク尺度によってはリスク量が有限の値として定まらない事もある。例えば conditional value at risk (CVaR) は可積分でない確率変数に対して有限値として定義されない。本稿で扱われる VaR にはそのような制約は無いが、ここではリスク尺度の定義域について厳密な議論はしない。以下で一般のリスク尺度を扱う場合には、リスク尺度毎に定義域を設定するか、定義域を $L^\infty(\Omega)$ に制限する等すれば良い。

[2] 以下では左連続な一般化逆関数を単に「一般化逆関数」と呼び、$F_X^{-1}(\alpha)$ $(= \mathrm{VaR}_\alpha(X))$ と表す事にする。その他の一般化逆関数の定義の仕方については [9] の Definition A.14 (及び Lemma A.15) を参照せよ。

これは任意の $n \in \mathbb{N}$ と $X_1, \ldots, X_n$ に対して

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)$$

が成り立つ事と同値である。なお劣加法性は本来、任意の確率変数の組に対して (1.1) が満たされる時に使われる用語だが、本稿では特定の X, Y が (1.1) を満たす時にも「X と Y に対して (あるいは (X,Y) に対して) ρ の劣加法性が成り立つ」と表現する事にする。

所与の $\alpha \in (0,1)$ に対して VaR_α が劣加法性を満たさないような例を与える事は容易である。例えば、α に対して $p, q \in (0,1)$ を $(1-p)(1-q) \leq \alpha < 1 - \max\{p,q\}$ あるいは $1 - \min\{p,q\} \leq \alpha < 1 - pq$ となるように取り、X, Y をそれぞれ $\mathrm{Bernoulli}(p), \mathrm{Bernoulli}(q)$ に従う独立な確率変数とすれば良い[3] (Proposition 6 を参照せよ)。一方で、楕円分布族のように、VaR の劣加法性が保たれるような確率変数のクラスが存在する事も知られている (楕円分布の定義や劣加法性に関する詳細は Section 2.1 で述べる)。金融商品の収益率のモデルとして最も基本的な確率分布と言える正規分布は楕円分布族に属するため、二次元確率ベクトル (X,Y) が (二変量) 正規分布に従う場合には VaR を「劣加法的なリスク尺度」として扱っても良いのかもしれない。正規分布は分布の裾が厚くないため、大規模な金融リスクを捕捉するために正規分布は適当ではない、という指摘もあるが、楕円分布族には他に t 分布等も属しており、ある程度ファットテールな確率分布に対して VaR を「劣加法的なリスク尺度」として用いても良いのかもしれない[4]。

また、VaR は共単調加法的 (comonotonic additive あるいは comonotonically additive) である事が知られている。即ち、X と Y が共単調 (comonotone) である時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) \tag{1.2}$$

が成り立つ (共単調性の定義は Section 3 で与えるが、おおよそ「X と Y の変動の仕方が完全に連動している」事を意味している[5])。VaR が加法的である時は特に劣加法的であるので、X と Y が共単調である時は任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して VaR の劣加法性が成り立つと言える。

本稿では、「VaR はどのような確率変数のクラスに対して劣加法的となるのか?」あるいは「X と Y に対して VaR の劣加法性が成り立つ時、(X,Y) はどのような性質を持つか?」という問題に焦点を当てる。特に次の問題を中心に考える。

(P1) X と Y に対して、任意の $\alpha \in (0,1)$ における VaR の劣加法性

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) \tag{1.3}$$

が成り立つのは如何なる時か?

Section 2 では、上記の問題を一般の場合に考察する動機となった具体例、特に楕円分布と離散分布に対する VaR の性質について述べる。その際、上記の共単調性が本質的に重要と

[3] $P(X=0) = 1-p,\ P(X=1) = p$ となる。Y についても同様。

[4] 但し、多変量 t 分布では X と Y に異なる自由度パラメーターを与える事が出来ず、分布の裾の厚さが異なる確率変数の組を考える事が出来ない、という問題点もある。また、楕円分布は (適当なモーメント条件の仮定の下で) 各周辺分布の尖度が等しい値となってしまう事が知られており、この点も楕円分布を用いる場合の限界と言える ([11, 15])。

[5] 完全相関 (i.e., 相関係数が 1) という意味ではない。

なる事が示唆される。そこで Section 3 では複数の確率変数に対する共単調性についてまとめる。Section 4 では上記の問題に対する解答を示す。特に、いくつかの技術的な (しかし自然な) 仮定の下で、(P1) の答えが「X と Y が共単調である時に限られる」事が示される。また所与の $\alpha \in (0,1)$ に対しては上記の通り一般に VaR_α の劣加法性は成り立たないが、所与の確率変数 X, Y に対して、その依存構造を変化させると、周辺分布を変えないままいつでも X, Y に対する劣加法性を成り立たせる事が出来る事を合わせて示す (問題 (P2))。Section 5 は本稿におけるいくつかの結果の証明と付随する議論をまとめる。

2 Motivation

本章では、いくつかの具体的な確率変数のクラスについて VaR 劣加法性を成り立たせるような確率変数のペアが満たす性質を調べる。

2.1 楕円分布族と VaR の劣加法性

まず楕円分布の定義を与える。

Definition 1. n を自然数とする。

(i) 確率ベクトル $(X_1, \ldots, X_n)$ が球面分布に従うとは、ある関数 $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して、(X, Y) の特性関数が以下のように表される時の事を言う。

$$\mathrm{E}\left[e^{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n t_i X_i}\right] = \phi\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right), \quad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$$

この時 $(X_1, \ldots, X_n) \sim S_n(\phi)$ と表し、ϕ を $(X_1, \ldots, X_n)$ の characteristic generator と呼ぶ。

(ii) 確率ベクトル $(X_1, \ldots, X_n)$ が楕円分布に従うとは、ある $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ と確率ベクトル $(Y_1, \ldots, Y_n) \sim S_n(\phi)$ が存在して

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \mu + A \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

と書ける時の事を言い、$(X_1, \ldots, X_n) \sim E_n(\mu, A^\top A, \phi)$ と表す[6]。

以下では全て二次元の分布についてのみ考察するが、本節の議論は全て一般の多次元分布の場合にも成り立つ。

次は明らかであろう。

Lemma 1. $(X, Y) \sim E_2(\mu, \Sigma, \phi)$ とする時 $X \sim E_1(\mu_1, \Sigma_{11}, \phi)$ 及び $Y \sim E_1(\mu_2, \Sigma_{22}, \phi)$ が成り立つ。ここで

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\Sigma_{12} = \Sigma_{21})$$

とした。

[6] A は次の意味で不変である。即ち、$A, B \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ が $A^\top A = B^\top B$ を満たす時、$(Y_1, \ldots, Y_n) \sim S_n(\phi)$ に対して $A(Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ と $B(Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ は同分布。

Lemma 2. $(X,Y) \sim E_2(\mu,\Sigma,\phi)$ なる X,Y が二乗可積分の時、(X,Y) の平均ベクトル及び分散共分散行列はそれぞれ μ 及び $c_\phi\Sigma$ と一致する。但し c_ϕ は ϕ から定まる非負の定数[7]。

Proof. 仮定より、ある $(Z,W) \sim S_2(\phi)$ に対して

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mu + \Sigma^{1/2} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}$$

と書ける。Σ が非退化である時は Z,W も二乗可積分となり、これらは期待値が 0, 同分布かつ無相関となる事が分かる。ここから (X,Y) の期待ベクトルと μ が一致する事は明らかであり、また分散共分散行列は

$$\Sigma^{1/2} \begin{pmatrix} \mathrm{E}[Z^2] & 0 \\ 0 & \mathrm{E}[Z^2] \end{pmatrix} \Sigma^{1/2} = \mathrm{E}[Z^2]\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2} = \mathrm{E}[Z^2]\Sigma$$

となる。Σ が退化している時は $\Sigma_{11}\Sigma_{22} = \Sigma_{12}^2$ となり、ここから

$$\sqrt{\Sigma_{11}+\Sigma_{22}} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \mu \right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(\sqrt{\Sigma_{11}} Z + \sqrt{\Sigma_{22}} W \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_{11}} \\ \sqrt{\Sigma_{22}} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

あるいは

$$\sqrt{\Sigma_{11}+\Sigma_{22}} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \mu \right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(\sqrt{\Sigma_{11}} Z - \sqrt{\Sigma_{22}} W \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_{11}} \\ -\sqrt{\Sigma_{22}} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

となる事から従う。 ■

Proposition 1. $X \sim E_1(\mu,\sigma^2,\phi)$ とする時

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \mu + \sigma \mathrm{VaR}_\alpha(V_\phi), \quad \alpha \in (0,1)$$

が成り立つ。ここで $V_\phi \sim S_1(\phi)$ とした。

Proof. $\sigma = 0$ の時は明らかなので $\sigma > 0$ の時に示せば良い。楕円分布の定義から $(X-\mu)/\sigma \sim S_1(\phi)$ であるので、VaR の law invariance より $V_\phi = (X-\mu)/\sigma$ として良い。後は VaR の positive homogeneity と translation invariance (a.k.a. cash invariance) から明らか。 ■

楕円分布に対する VaR の性質として以下が良く知られている ([8] の Theorem 1)。

Proposition 2. $(X,Y) \sim E_2(\mu,\Sigma,\phi)$ かつ X,Y は二乗可積分とする時、$\alpha \in [1/2,1)$ に対して (1.3) が成り立つ。

Remark 1. α を 1/2 以上としているところに注意！標語的に「VaR は楕円分布に従う確率変数に対して劣加法性を持つ」と言われるが、全ての信頼水準 $\alpha \in (0,1)$ に対して成り立つわけではない。それは証明を見れば良く分かる。

[7] 具体的には $c_\phi = -2\phi'(0+)$ と書ける。c_ϕ は $S_1(\phi)$ に従う確率変数の二次モーメント (証明中の記号を使うと $\mathrm{E}[Z^2]$) とも一致する。

Proof of Proposition 2. $c_\phi = 0$ の時は $X = \mu$ となり主張は自明となるので、以下 $c_\phi > 0$ の時のみ考える。Lemma 1, Lemma 2 及び Proposition 1 より、$Z = X, Y, X+Y$ に対して以下が成り立つ。

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Z) = \mathrm{E}[Z] + c_\phi^{-1}\mathrm{Var}(Z)^{1/2}\mathrm{VaR}_\alpha(V_\phi)$$

ここで $\mathrm{Var}(Z)$ は Z の分散 (よってその 1/2 乗は Z の標準偏差)。
Claim. $\mathrm{VaR}_\alpha(V_\phi) \geq 0$ が成り立つ。
$\because$) V_ϕ の特性関数は実数値なので V_ϕ と $-V_\phi$ は同分布であり、ここから

$$P(V_\phi < 0) = P(V_\phi > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(V_\phi = 0))$$

が得られ、特に $P(V_\phi < 0) \leq 1/2 \leq P(V_\phi \leq 0)$ が成り立つ。よって $\mathrm{VaR}_\alpha(V_\phi) \geq 0,\ \ \alpha \geq 1/2$ である事が分かる。 ■
あとは標準偏差の (リスク尺度としての) 劣加法性から結論が従う。 ■

同様の議論によって、$(X,Y) \sim E_2(\mu,\Sigma,\phi)$ とする時、 $\alpha \in (0,1/2)$ に対しては VaR の優加法性

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) \tag{2.3}$$

が成り立つ事が分かる。よって、もし $(X,Y) \sim E_2(\mu,\Sigma,\phi)$ が (P1) の設定に従うならば、任意の $\alpha \in (0,1/2)$ に対して加法性 (1.2) が成立する事となる。$\phi \equiv 1$ でないならば $\mathrm{VaR}_\alpha(V_\phi) < 0$ となるような α が取れるので、Proposition 1 と Lemma 2 を適用すると標準偏差の加法性

$$\mathrm{Var}(X+Y)^{1/2} = \mathrm{Var}(X)^{1/2} + \mathrm{Var}(Y)^{1/2}$$

が得られるが、上式が成り立つためには以下のいずれかが満たされなければならない事が直接計算によって確認出来、これが楕円分布に対する (P1) の答えとなる ($\phi \equiv 1$ の時は以下は自明)。

- X は a.s. に定数
- Y は a.s. に定数
- $\mathrm{Corr}(X,Y) = \dfrac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}} = 1$

この時、特に任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して VaR の加法性 (1.2) が (X,Y) に対して成り立つ。

2.2 離散分布と VaR の劣加法性

次に、X と Y が有限個の値しか取らない離散分布に従う場合を考える。$m,n \in \mathbb{N}$, $a_1 < \cdots < a_m$, $b_1 < \cdots < b_n$ とし、(X,Y) の確率分布を以下で定める。

$$P(X = a_i,\ Y = b_j) = p_{ij},\quad i = 1,\ldots,m,\quad j = 1,\ldots,n \tag{2.4}$$

ここで $p_{ij} \in [0,1]$ であり、$\displaystyle\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ が成り立つ。

$m,n \leq 3$ の時、(P1) の答えは [14] によって与えられているが、ここでは特に $m = n = 2$ の時について述べる。

Proposition 3. $m = n = 2$ とする。この時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.3) が成り立つ事は以下と同値。

$$p_{12}p_{21} = 0 \tag{2.5}$$

またこの時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.2) が成り立つ。

言うまでもなく、(2.5) は p_{12} と p_{21} のいずれか (あるいは両方) が 0 である事を意味する。例えば $p_{12} = 0$ である場合は $X = a_1 \Longrightarrow Y = b_1$ や $Y = b_2 \Longrightarrow X = a_2$ が成り立つ事となる。

一般の m, n についての結果を述べるためにいくつか準備をする。まず $S = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ と置き、

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{m+n-2} \in \{0,1\}^{m+n-2} \ ; \ \sum_{k=1}^{m+n-2} \lambda_k = n - 1 \right\}$$

と定める。また $\lambda \in \Lambda$ に対して $(x_k^\lambda)_{k=1}^{m+n-2}$ と $(y_k^\lambda)_{k=1}^{m+n-2}$ を次で帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} x_1^\lambda &= y_1^\lambda = 1 \\ x_{k+1}^\lambda &= x_k^\lambda + 1 - \lambda_k \\ y_{k+1}^\lambda &= y_k^\lambda + \lambda_k \end{aligned} \tag{2.6}$$

この時、$\lambda \in \Lambda$ の定義から $x_{m+n-2}^\lambda = m,\ y_{m+n-2}^\lambda = n$ となる事に注意。最後に $l^\lambda \subset S$ を

$$l^\lambda = \{(x_k^\lambda, y_k^\lambda) \ ; \ k = 1, \ldots, m+n-2\}$$

とする。

Theorem 1. 以下は同値。

(i) 任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.3) が成り立つ。

(ii) ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して、任意の $(i,j) \in S \setminus l^\lambda$ に対して $p_{ij} = 0$ となる。

(iii) ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して、$\displaystyle\sum_{(i,j) \in l^\lambda} p_{ij} = 1$ となる。

またこの時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.2) が成立する。

Theorem 1 (ii) は、確率行列 $(p_{ij})_{i,j}$ を以下のように表形式で表して左上の p_{11} から右下の p_{mn} までを「右に進む」か「下に進む」のどちらかによる経路で繋いだ時に、「p_{11} と p_{mn} を結ぶいずれかの経路に含まれていない p_{ij} は全て 0 となる」事を表している。

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{matrix}$$

3 Comonotonicity

確率ベクトル (あるいは複数の確率変数) に対する共単調性の定義には同値な条件がいくつかあるが、ここでは以下のように定義する。

Definition 2. n 次元確率ベクトル $(X_1,\dots,X_n)$ が以下を満たす時、$(X_1,\dots,X_n)$ は共単調であると言う。

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \min\{F_{X_1}(x_1),\dots,F_{X_n}(x_n)\},\quad x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$$

上は、$(X_1,\dots,X_n)$ の依存構造が次で定義される comonotonic copula で記述される事を意味している。

$$M(u_1,\dots,u_n) = \min\{u_1,\dots,u_n\},\quad u_1,\dots,u_n\in[0,1]$$

M は Fréchet–Hoeffding 上界とも呼ばれ、n 次元コピュラの中で最大のものとなっている。

以下の命題は有用である。

Proposition 4. 確率ベクトル $(X_1,\dots,X_n)$ に対して以下は同値[8]。

(i) $(X_1,\dots,X_n)$ は共単調。

(ii) $(0,1)\subset\mathbb{R}$ 上の一様分布に従う確率変数 U が存在して、$(X_1,\dots,X_n)$ と $(F_{X_1}^{-1}(U),\dots,F_{X_n}^{-1}(U))$ は同分布[9]。

(iii) 確率変数 Z と単調非減少関数 $f_1,\dots,f_n$ が存在して $(X_1,\dots,X_n)$ と $(f_1(Z),\dots,f_n(Z))$ は同分布。

(iv) $(X_1,\dots,X_n)$ は *a.s.* に共単調集合上に値を取る。ここで、$A\subset\mathbb{R}^n$ が共単調集合であるとは以下が成り立つ時の事を言う[10]。

任意の $(x_1,\dots,x_n),(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)\in A,\ i,j=1,\dots,n$ に対して $(x_i-\tilde{x}_i)(x_j-\tilde{x}_j)\ge 0$

共単調性は次で定義される convex order とも深い繋がりがある。

Definition 3. 可積分な確率変数 X と Y について、以下の (i) と (ii) が成り立つ時、X は convex order の下で Y 以下であると言い、$X\le_{\mathrm{cx}} Y$ と表す。

(i) $\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}[Y]$

(ii) 任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して $\mathrm{E}[\max\{X-c,0\}]\le\mathrm{E}[\max\{Y-c,0\}]$

以下は Cheung の定理として知られている ([1, 2, 12])。

Theorem 2. 各成分が可積分な確率ベクトル $(X_1,\dots,X_n)$ に対して以下は同値。

(i) $(X_1,\dots,X_n)$ は共単調。

---

[8] これ以外の同値条件については [3, 5, 6] 及び Section 5.5 を参照せよ。

[9] 確率空間が atomless であるならば $X_1=F_{X_1}^{-1}(U),\ \dots,\ X_n=F_{X_n}^{-1}(U)$ a.s. となるように U を取れる ([3] の Proposition 2.1 と [9] の Proposition A.27 を参照せよ)。

[10] つまり、$(x_1,\dots,x_n)\le(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} x_i\le\tilde{x}_i,\ i=1,\dots,n$ が A において全順序を定める。

(ii) 任意の確率ベクトル $(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n)$ で各周辺分布が $(X_1,\dots,X_n)$ のそれと一致するものに対して $\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i \leq_{\mathrm{cx}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ が成り立つ。

ここで、Section 2 で見てきたいくつかの具体的なケースを振り返る。

まず $(X,Y)\sim E_2(\mu,\Sigma,\phi)$ である時は、(X,Y) が完全相関 (i.e., $\mathrm{Corr}(X,Y)=1$) ならば共単調となる。実際、この場合には Σ は退化しており、(2.1) と Proposition 4 の (iii) を使えば良い[11]。また、X と Y のいずれか (あるいは両方) が定数である時も共単調の定義は満たされている。よって、Section 2.1 で述べた (P1) の答えは、いずれも (X,Y) が共単調である事を示している。

X と Y が離散分布に従う場合にも、(P1) の条件の下で (X,Y) の共単調性が成り立っている。実際、任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して l^{λ} は共単調集合になっており、よって $\{(a_i,b_j)\,;\,(i,j)\in l^{\lambda}\}$ も共単調集合となる。

本節の最後に、確率変数の共単調性と独立性の関係について見ておく。これらの性質はある意味で対極となっており、trivial な場合を除いて両立する事はない。

Proposition 5. X,Y を独立かつ共単調な確率変数とする時、X または Y のどちらかは *a.s.* に定数。

Proof. Y が a.s. に定数でない時に X が a.s. に定数である事を示せば良い。仮定から、任意の $x,y\in\mathbb{R}$ に対して、X と Y の共単調性と独立性を使って

$$\min\{F_X(x),F_Y(y)\}=P(X\leq x,\ Y\leq y)=F_X(x)F_Y(y)$$

が得られる。Y は a.s. に定数でないとしているので、ある $y\in\mathbb{R}$ が存在して $F_Y(y)=:a\in(0,1)$ となる。よって

$$\min\{a,F_X(x)\}=aF_X(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{3.1}$$

が成り立つが、$a\leq F_X(x)$ の時、(3.1) から $a=aF_X(x)$ となり、$a\neq 0$ なのでここから $F_X(x)=1$ を得る。$a>F_X(x)$ の時は (3.1) から $F_X(x)=aF_X(x)$ となるが、$a\neq 1$ であるので、これが成り立つためには $F_X(x)=0$ でなければならない。以上より $F_X(x)=0$ or 1 であり、ここから X が a.s. に定数である事が分かる。 ■

4 Main Results

我々の最初の問題 (P1) を再掲する。

(P1) X と Y に対して、任意の $\alpha\in(0,1)$ における VaR の劣加法性

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)\leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y) \tag{4.1}$$

が成り立つのは如何なる時か?

本稿の主結果は次であり、これによって (P1) は解決する。

Theorem 3. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ は *atomless* であるとする[12]。この時、可積分確率変数 X,Y について以下は同値。

[11] (2.2) は完全逆相関 (i.e., $\mathrm{Corr}(X,Y)=-1$) である場合に相当する。

[12] 次を満たす事象 $A\in\mathcal{F}$ を atom と呼ぶ。

(i) 任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.3) が成り立つ。

(ii) X と Y は共単調。

またこの時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.2) が成り立つ。

Remark 2.

(i) 上では二つの確率変数の組について述べたが、一般の n 次元確率ベクトルについても全く同様の事が言える。即ち、可積分確率ベクトル $(X_1, \ldots, X_n)$ が共単調である事と

$$\mathrm{VaR}_\alpha \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{VaR}_\alpha(X_i), \quad \alpha \in (0,1)$$

を満たす事は同値。

(ii) X と Y が独立である時、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して (1.3) が成り立つならば、X と Y のいずれかは a.s. に定数となる事が Proposition 5 から分かる。

Theorem 3 より、全ての信頼水準において VaR の劣加法性を成り立たせる確率変数の組は共単調であるものに限られる事が分かる。それでは、信頼水準 $\alpha \in (0,1)$ を所与とする時はどうであろうか。

(P2) 所与の $\alpha \in (0,1)$ において、X と Y に対して (1.3) が成り立つ時、X と Y は常に共単調になるか？

(P2) の否定的な回答は、実際に (1.3) が成り立つような共単調でない (例えば独立な) (X,Y) の例を構成すれば得られるが、実は更に強い以下の結果が成り立つ。

Theorem 4. 任意の $\alpha \in (0,1)$ 及び確率変数 X, Y に対してある二次元確率ベクトル $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ が存在して以下が成り立つ。

(i) X 及び Y はそれぞれ $\tilde{X}$ 及び $\tilde{Y}$ と同分布。

(ii) $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ は (1.3) を (X, Y をそれぞれ $\tilde{X}, \tilde{Y}$ に置き換えて) 満たす。

(iii) $\tilde{X}$ と $\tilde{Y}$ は共単調でない。

Theorem 4 は、X と Y のそれぞれの分布関数を周辺分布とする共単調でない二次元確率ベクトルであって VaR_α の劣加法性を成り立たせるものが常に存在する事を示している。言い換えると、所与の $\alpha \in (0,1)$ の下で、(X,Y) に対して VaR_α が劣加法性を満たさない場合でも、各々の周辺分布を変えずに依存構造を変える事で、劣加法性が成り立つような確率変数の組をいつでも構成出来る。

- $P(A) > 0$.
- 任意の $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$ に対して $P(B) = 0$ または $P(B) = P(A)$ が成り立つ。

Atom を持たない確率空間は atomless と呼ばれる。

5 Appendix

5.1 VaR の劣加法性が成り立たない例

ここでは Section 1 で述べた Bernoulli 分布に従う例において VaR の劣加法性が成り立たない事を示す。

Proposition 6. $\alpha \in (0,1)$ とし、$p, q \in (0,1)$ を $(1-p)(1-q) \leq \alpha < 1-\max\{p,q\}$ または $1-\min\{p,q\} \leq \alpha < 1-pq$ なる実数とする。確率変数 X, Y をそれぞれ $\mathrm{Bernoulli}(p)$, $\mathrm{Bernoulli}(q)$ に従う独立な確率変数とすると、(1.3) は成り立たない。

Proof. VaR の定義から、$\beta \in (0,1)$ に対して

$$\mathrm{VaR}_\beta(X) = \begin{cases} 0 & (\beta < 1-p) \\ 1 & (\beta \geq 1-p) \end{cases}, \quad \mathrm{VaR}_\beta(Y) = \begin{cases} 0 & (\beta < 1-q) \\ 1 & (\beta \geq 1-q) \end{cases}$$

$$\mathrm{VaR}_\beta(X+Y) = \begin{cases} 0 & (\beta < (1-p)(1-q)) \\ 1 & ((1-p)(1-q) \leq \beta < 1-pq) \\ 2 & (\beta \geq 1-pq) \end{cases}$$

が得られ、これと p, q の取り方から、$(1-p)(1-q) \leq \alpha < 1-\max\{p,q\}$ のとき

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) = 0 < 1 = \mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)$$

となり、$1-\min\{p,q\} \leq \alpha < 1-pq$ のとき

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) = 1 < 2 = \mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)$$

となる。 ■

5.2 Proof of Theorem 1

(i) $\Longrightarrow$ (ii) のみ示す[13]。$N = 1, 2, \cdots, n+m-2$ に対して

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k=1}^N \in \{0,1\}^N \ ; \ N-m+1 \leq \sum_{k=1}^N \lambda_k \leq n-1 \right\}$$

とおく。ここで、Λ_N は Λ の部分列の集合であり、$\Lambda = \Lambda_{m+n-2}$ である。$\lambda \in \Lambda_N$ に対して数列 $(x_k^\lambda)_{k=1}^N$ と $(y_k^\lambda)_{k=1}^N$ を (2.6) によって帰納的に定め、$l_N^\lambda \subset S$ を

$$l_N^\lambda = \{(x_k^\lambda, y_k^\lambda) \ ; \ k = 1, \ldots, N+1\}$$

とする。また

$$p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad q_j = \sum_{i=1}^m p_{ij}$$

と置いておく。

[13] (ii) $\Longrightarrow$ (i) 及び (1.2) は直接計算によっても示せるが、Section 3 で述べたように $\{(a_i, b_j) \ ; \ (i,j) \in l^\lambda\}$ が共単調集合である事を使えば自明となる。

Proposition 7. (i) を仮定する。この時、各 $N = 1, \dots, m+n-2$ に対してある $\lambda \in \Lambda_N$ が存在して、任意の $(i,j) \in l_N^\lambda$ に対して以下が成り立つ。

(p1)　$(i+1,j) \in l_N^\lambda$ ならば $p_{ij'} = 0$ $(j' = j+1, \cdots, n)$.

(p2)　$(i,j+1) \in l_N^\lambda$ ならば $p_{i'j} = 0$ $(i' = i+1, \cdots, m)$.

Proof. まず $N = 1$ の時を考える。$\alpha \in (0,1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) &\begin{cases} = a_1 + b_1 & (\alpha \le p_{11}) \\ > a_1 + b_1 & (p_{11} < \alpha) \end{cases} \\
\mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) &\begin{cases} = a_1 + b_1 & (\alpha \le \min\{p_1, q_1\}) \\ > a_1 + b_1 & (\min\{p_1, q_1\} < \alpha) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となるので、(i) が成り立つためには $\min\{p_1, q_1\} \le p_{11}$ 即ち以下のいずれかが成り立たなければならない。

(a)　$p_{12} = \cdots = p_{1n} = 0$.

(b)　$p_{21} = \cdots = p_{m1} = 0$.

(a) のとき $\lambda_1 = 0$ とし、(b) のとき $\lambda_1 = 1$ とすれば題意は満たされる。

次に、$N = 1, \dots, m+n-3$ の時に主張が成り立つと仮定した時に $N+1$ でも成立する事を示す。仮定より、(p1)–(p2) が成立するような $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^N \in \Lambda_N$ が存在する。この時、λ_{N+1} を次のように定める。

- $\displaystyle\sum_{k=1}^N \lambda_k = n-1$ の時 $\lambda_{N+1} = 0$ とする。
- $\displaystyle\sum_{k=1}^N \lambda_k = N-m-1$ の時 $\lambda_{N+1} = 1$ とする。
- $N - m - 1 < \displaystyle\sum_{k=1}^N \lambda_k < n-1$ の時、$\tilde{p}_{N+1} = \displaystyle\sum_{j=y_{N+1}^\lambda}^n p_{x_{N+1}^\lambda, j}$,　$\tilde{q}_{N+1} = \displaystyle\sum_{i=x_{N+1}^\lambda}^m p_{i, y_{N+1}^\lambda}$, $r_k = \displaystyle\sum_{l=1}^k p_{x_l^\lambda, y_l^\lambda}$ と置くと

$$
\min\left\{ \sum_{i=1}^{x_N^\lambda} p_i, \sum_{j=1}^{y_N^\lambda} q_j \right\} = r_N
$$

かつ

$$
\sum_{i=1}^{x_{N+1}^\lambda} p_i = r_N + \tilde{p}_{N+1}, \quad \sum_{j=1}^{y_{N+1}^\lambda} q_j = r_N + \tilde{q}_{N+1}
$$

となっている事に注意する。$N=1$ の時と同様に

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y)\begin{cases} = a_{x^\lambda_{N+1}}+b_{y^\lambda_{N+1}} & (r_N<\alpha\le r_N+\min\{\tilde{p}_{N+1},\tilde{q}_{N+1}\}) \\ > a_{x^\lambda_{N+1}}+b_{y^\lambda_{N+1}} & (r_N+\min\{\tilde{p}_{N+1},\tilde{q}_{N+1}\}<\alpha) \end{cases}$$

及び

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)\begin{cases} = a_{x^\lambda_{N+1}}+b_{y^\lambda_{N+1}} & (r_N<\alpha\le r_{N+1}) \\ > a_{x^\lambda_{N+1}}+b_{y^\lambda_{N+1}} & (r_{N+1}<\alpha) \end{cases}$$

が得られ、これと (i) から

$$\min\{\tilde{p}_{N+1},\tilde{q}_{N+1}\}=p_{x^\lambda_{N+1},y^\lambda_{N+1}}$$

とならなければならず、$\tilde{p}_{N+1}=p_{x^\lambda_{N+1},y^\lambda_{N+1}}$ の時 $\lambda_{N+1}=0$, $\tilde{q}_{N+1}=p_{x^\lambda_{N+1},y^\lambda_{N+1}}$ の時 $\lambda_{N+1}=1$ と定める。

以上によって (p1)–(p2) が成り立つ事を確認出来る。 ■

Proposition 7 において $N=m+n-2$ とすると、任意の $(i,j)\in l^\lambda$ に対して (p1)–(p2) が成り立つような $\lambda\in\Lambda$ が存在する事が分かる。そこで $(i,j)\notin l^\lambda=\{(x^\lambda_1,y^\lambda_1),\ldots,(x^\lambda_{m+n-2},y^\lambda_{m+n-2})\}$ とする時、$(x^\lambda_k,y^\lambda_k)_k$ の作り方から、ある k が存在して以下のいずれかが成り立つ。

(1) $x^\lambda_k=i$ かつ $y^\lambda_k<j$

(2) $x^\lambda_k<i$ かつ $y^\lambda_k=j$

(1) の時、更にある $l\ge k$ が存在して $x^\lambda_l=i$, $x^\lambda_{l+1}=i+1$ かつ $y^\lambda_l<j$ となる (さもなければ $(i,j)\notin l^\lambda$ に矛盾する; なお $i=m$ の時、(1) のケースが生じる事は無い)。すると (p1) から

$$p_{i,y^\lambda_l+1}=\cdots=p_{in}=0$$

が成り立つ事となるが、$y^\lambda_l<j$ ゆえここから $p_{ij}=0$ となる事が分かる。(2) のケースについても同様。これは (ii) を意味している。 ■

5.3 Proof of Theorem 3

(ii) ならば (i) である事は明らかなので、(i) の時に (ii) 及び (1.2) が成り立つ事を示す。仮定より、任意の $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$F^{-1}_{X+Y}(\alpha)\le F^{-1}_X(\alpha)+F^{-1}_Y(\alpha) \tag{5.1}$$

が成り立つ。また確率空間が atomless である事から、[9] の Lemma A.28 より、$(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U が存在して $X+Y=F^{-1}_{X+Y}(U)$ a.s. が成り立つ。そこで

$$\hat{X}=F^{-1}_X(U),\quad \hat{Y}=F^{-1}_Y(U)$$

と置くと、[9] の Lemma A.19 から、$\hat{X}$ 及び $\hat{Y}$ はそれぞれ X 及び Y と同分布となる。また Proposition 4 から $(\hat{X},\hat{Y})$ は共単調となり、(5.1) に $\alpha=U$ を代入して

$$X+Y=F^{-1}_{X+Y}(U)\le\hat{X}+\hat{Y}\quad\text{a.s.}$$

が得られる。そこで $Z = \hat{X} + \hat{Y} - X - Y$ と置くと、上式から $Z \geq 0$ a.s. であるが、一方で $\mathrm{E}[Z] = 0$ であるので、$Z = 0$ a.s. とならなければならない。即ち

$$X + Y = \hat{X} + \hat{Y} \quad \text{a.s.} \tag{5.2}$$

であり、ここから任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) &= \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{X}+\hat{Y}) \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{X}) + \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{Y}) \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y)
\end{aligned}$$

となり、(1.2) が得られる[14]。

(X,Y) が共単調になる事は Theorem 2 から分かる。実際、$(\tilde{X},\tilde{Y})$ を各周辺分布が (X,Y) のものと等しい確率ベクトルとする時、$(\hat{X},\hat{Y})$ が共単調である事から、Theorem 2 を使って

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\max\{\tilde{X}+\tilde{Y}-c,0\}] &\leq \mathrm{E}[\max\{\hat{X}+\hat{Y}-c,0\}] \\
&= \mathrm{E}[\max\{X+Y-c,0\}], \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

が得られ、よって $\tilde{X}+\tilde{Y} \leq_{\mathrm{cx}} X+Y$ であるので、再び Theorem 2 から (X,Y) は共単調。 ■

5.4 確率変数の和の分布関数の上下限と Theorem 4 の証明

Theorem 4 は本質的に以下の二つの定理の帰結である ([10] の Theorem 3.1 と Theorem 3.2, また [4] の Proposition 1 も合わせて参照せよ)。

Theorem 5. 確率変数 X, Y に対して以下の不等式が成り立つ。

$$\tau_W^{X,Y}(z) \leq F_{X+Y}(z-) \leq F_{X+Y}(z) \leq \rho_W^{X,Y}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

但し

$$\begin{aligned}
\tau_W^{X,Y}(z) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} W(F_X(x-), F_Y((z-x)-)) \\
\rho_W^{X,Y}(z) &= \inf_{x\in\mathbb{R}} \overline{W}(F_X(x), F_Y(z-x))
\end{aligned}$$

であり、W は *countermonotonic copula:*

$$W(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}, \quad u, v \in [0,1]$$

また $\overline{W}(u,v) = u + v - W(u,v)$ とした。更に、ある確率変数 $S_{\min}, S_{\max}$ が存在して以下のように書ける[15]。

$$\tau_W^{X,Y}(z) = P(S_{\min} < z), \quad \rho_W^{X,Y}(z) = P(S_{\max} \leq z) = F_{S_{\max}}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

Theorem 6. X, Y を確率変数とし、$\tau_W^{X,Y}, \rho_W^{X,Y}$ は *Theorem 5* のステートメントで与えられたものとする。

[14] 共単調性から速やかに従う等式であるので、直接示す必要は本来無いのだが。
[15] 特に、$\rho_W^{X,Y}$ は確率分布関数としての性質を持つ。

(i) 所与の $z \in \mathbb{R}$ に対して、C_z^1 を以下で定める。

$$C_z^1(u,v) = \begin{cases} \max\{u+v-1, \tau_W^{X,Y}(z)\}, & (u,v) \in [\tau_W^{X,Y}(z), 1]^2 \\ \min\{u,v\}, & otherwise \end{cases}$$

この時、(X_z^1, Y_z^1) を分布関数

$$F_{(X_z^1, Y_z^1)}(x,y) = C_z^1(F_X(x), F_Y(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

を持つ確率ベクトルとすると $\tau_W^{X,Y}(z) = F_{X_z^1 + Y_z^1}(z-)$ $(= P(X_z^1 + Y_z^1 < z))$ が成り立つ。

(ii) 所与の $z \in \mathbb{R}$ に対して、C_z^2 を以下で定める。

$$C_z^2(u,v) = \begin{cases} \max\{u+v-1, \rho_W^{X,Y}(z)\}, & (u,v) \in [0, \rho_W^{X,Y}(z)]^2 \\ \min\{u,v\}, & otherwise \end{cases}$$

この時、(X_z^2, Y_z^2) を分布関数

$$F_{(X_z^2, Y_z^2)}(x,y) = C_z^2(F_X(x), F_Y(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

を持つ確率ベクトルとすると $\rho_W^{X,Y}(z) = F_{X_z^2 + Y_z^2}(z)$ が成り立つ。

Proof of Theorem 4. $\rho = \rho_W^{X,Y}$ と略記する。また $(\hat{X}, \hat{Y})$ を (X,Y) の comonotonic copy, 即ち各周辺分布が (X,Y) のものと一致する共単調な確率ベクトルとする。任意の $\varepsilon > 0$ を取ると、Theorem 5 と ρ^{-1} の定義から

$$F_{\hat{X}+\hat{Y}}(\rho^{-1}(\alpha) - \varepsilon) \leq \rho(\rho^{-1}(\alpha) - \varepsilon) < \alpha$$

となり、ここから

$$\rho^{-1}(\alpha) - \varepsilon < F_{\hat{X}+\hat{Y}}^{-1}(\alpha)$$

が得られる。よって

$$\rho^{-1}(\alpha) \leq F_{\hat{X}+\hat{Y}}^{-1}(\alpha) \tag{5.3}$$

が成立する。

一方、Theorem 6 から $\rho(\rho^{-1}(\alpha)) = F_{X^{(\alpha)}+Y^{(\alpha)}}(\rho^{-1}(\alpha))$ なる確率ベクトル $(X^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)})$ であって、各周辺分布が (X,Y) のそれと一致するものが存在する。この時、ρ の右連続性から

$$\alpha \leq \rho(\rho^{-1}(\alpha)) = F_{X^{(\alpha)}+Y^{(\alpha)}}(\rho^{-1}(\alpha))$$

であるので

$$F_{X^{(\alpha)}+Y^{(\alpha)}}^{-1}(\alpha) \leq \rho^{-1}(\alpha)$$

が得られる。これと (5.3) から

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X^{(\alpha)} + Y^{(\alpha)}) &\leq \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{X} + \hat{Y}) \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{X}) + \mathrm{VaR}_\alpha(\hat{Y}) \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha(X^{(\alpha)}) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y^{(\alpha)}) \end{aligned}$$

となり、$(X^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)})$ に対して VaR_α の劣加法性が成り立つ事が分かった。また作り方から $(X^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)})$ は共単調ではない ($\rho(z) < 1$ である限り C_z^2 は comonotonic copula M と一致しない)。 ■

Remark 3.

(i) [7] では、上と同様の議論が $\tau_W^{X,Y}$ に対して行われており、「所与の X, Y に対して $\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)$ を最大化させる依存構造」は worst VaR scenario と位置付けられている。

(ii) Theorem 6 (ii) において、もし z に依存しないコピュラ C^* が存在して、$F_{(\tilde{X},\tilde{Y})}(x,y) = C^*(F_X(x), F_Y(y))$ を満たす確率ベクトル $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ に対して $\rho_W^{X,Y} = F_{\tilde{X}+\tilde{Y}}$ と書けるならば、上と同様の議論によって

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{X}+\tilde{Y}) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{X}) + \mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{Y}), \quad \alpha \in (0,1)$$

が成り立つ事になり、Theorem 3 の主張に反しているように見えるかもしれない。しかし、このような C^* が存在するのは X あるいは Y が a.s. に定数である時に限られる事が知られている ([10, 13])。

5.5 共単調性と Wasserstein 計量

確率変数 X, Y が二乗可積分である時、X と Y の共単調性は Wasserstein 計量によって特徴付ける事も出来る。まず二次モーメントが有限な確率分布に対する Wasserstein 計量を定義する。

Definition 4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) + \int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) < \infty$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の確率分布に対して、以下で定義される W_2 を μ, ν に対する Wasserstein 計量と呼ぶ。

$$W_2(\mu,\nu) = \left(\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}} |x-y|^2 \pi(dx,dy) \right)^{1/2}$$

ここで $\Pi(\mu,\nu)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の確率分布 π であって以下を満たすもの全体からなる集合。

$$\int_{A\times\mathbb{R}} \pi(dx,dy) = \mu(A), \ \int_{\mathbb{R}\times B} \pi(dx,dy) = \nu(B), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

P_X, P_Y をそれぞれ X, Y の分布とする時、$W_2(P_X, P_Y)$ は以下のように表す事が出来る。

$$W_2(P_X,P_Y) = \inf_{C\in\mathfrak{C}^2} \mathrm{E}[|X^C - Y^C|^2]^{1/2}$$

但し $\mathfrak{C}^2$ は 2 次元コピュラ全体とし、(X^C, Y^C) は以下の分布関数を持つ確率ベクトル。

$$F_{(X^C,Y^C)}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

以下の命題は [3] の Proposition 2.1 の一部として示されている ([16] の Theorem 1 及び巻末の Note も参照せよ)。

Proposition 8. 二乗可積分確率変数 X, Y に対して以下は同値。

(i) X と Y は共単調。

(ii) X と Y は W_2 に対する *optimal coupling* となる、即ち

$$W_2(P_X,P_Y) = \mathrm{E}[|X-Y|^2]^{1/2}$$

Proposition 8 を示すために次の補題を示す。これは Hoeffding の共分散恒等式として知られている。

Lemma 3. 二乗可積分確率変数 X, Y に対して以下が成り立つ。

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(F_{(X,Y)}(x,y) - F_X(x)F_Y(y)\right) dxdy$$

Proof. $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ を (X, Y) の i.i.d. copy とし、

$$S = \mathrm{E}[(X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})]$$

と置く。

Step 1. まず $S = 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ が成り立つ事を示す。 S の右辺を展開し、$(\tilde{X}, \tilde{Y})$ が (X, Y) と独立同分布である事を使うと

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[\tilde{Y}] - \mathrm{E}[\tilde{X}]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[\tilde{X}\tilde{Y}] \\ &= 2(\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]) = 2\mathrm{Cov}(X,Y) \end{aligned}$$

が得られる。

Step 2. 次に、

$$L(x,y) = \mathrm{E}[(1_{\{X>x\}} - 1_{\{\tilde{X}>x\}})(1_{\{Y>y\}} - 1_{\{\tilde{Y}>y\}})]$$

とする時 $S = \int_{\mathbb{R}^2} L(x,y)dxdy$ を示す。所与の $x \in \mathbb{R}$ について

$$1_{\{X>x\}}(\omega) - 1_{\{\tilde{X}>x\}}(\omega) = \begin{cases} 1_{[\tilde{X}(\omega), X(\omega))}(x) & \text{on } \{X \geq \tilde{X}\} \\ -1_{[X(\omega), \tilde{X}(\omega))}(x) & \text{on } \{X < \tilde{X}\} \end{cases}$$

である事に注意して

$$\int_{\mathbb{R}} (1_{\{X>x\}} - 1_{\{\tilde{X}>x\}})dx = X - \tilde{X}$$

が得られ、同様にして

$$\int_{\mathbb{R}} (1_{\{Y>y\}} - 1_{\{\tilde{Y}>y\}})dy = Y - \tilde{Y}$$

であるので

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} L(x,y)dxdy &= \mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left((1_{\{X>x\}} - 1_{\{\tilde{X}>x\}})(1_{\{Y>y\}} - 1_{\{\tilde{Y}>y\}}\right) dxdy\right] \\ &= \mathrm{E}[(X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})] = S \end{aligned}$$

が成り立つ事が分かった。

Step 3. 結論。Step 1 と全く同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L(x,y) &= \mathrm{Cov}(1_{\{X>x\}}, 1_{\{Y>y\}}) \\ &= \mathrm{E}[1_{\{X>x\}}1_{\{Y>y\}}] - \mathrm{E}[1_{\{X>x\}}]\mathrm{E}[1_{\{Y>y\}}] \\ &= P(X>x, Y>y) - P(X>x)P(Y>y) \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{(X,Y)}(x,y) - (1-F_X(x))(1-F_Y(y)) \\ &= F_{(X,Y)}(x,y) - F_X(x)F_Y(y) \end{aligned}$$

と書ける事が分かるので、Step 1, Step 2 と合わせて

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \left(F_{(X,Y)}(x,y) - F_X(x)F_Y(y)\right) dxdy &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} L(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{2}S = \mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

が成り立つ事が示された。 ■

Proof of Proposition 8. $W_2(P_X, P_Y)$ の定義と Lemma 3 及び comonotonic copula $M(u,v) = \min\{u,v\}$ が Fréchet–Hoeffding 上界を与える事から

$$\begin{aligned}W_2(P_X,P_Y)^2 &= \inf_{C\in\mathfrak{C}^2}\left\{\mathrm{E}[(X^C)^2] + \mathrm{E}[(Y^C)^2] - 2\mathrm{E}[X^CY^C]\right\} \\ &= \mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2] - 2\inf_{C\in\mathfrak{C}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(C(F_X(x),F_Y(y)) - F_X(x)F_Y(y)\right)dxdy \\ &= \mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2] - 2\int_{\mathbb{R}^2}\left(\min\{F_X(x),F_Y(y)\} - F_X(x)F_Y(y)\right)dxdy \\ &= \mathrm{E}[|X^M - Y^M|^2]\end{aligned}$$

となり、ここから Wasserstein 計量に対して共単調なペア X^M, Y^M が optimal coupling になる事が示される。逆に、ある $C^* \in \mathfrak{C}^2$ について

$$W_2(P_X,P_Y) = \mathrm{E}[|X^{C^*} - Y^{C^*}|^2]$$

が成立する時、再び Lemma 3 から

$$\int_{\mathbb{R}^2}(M(F_X(x),F_Y(y)) - C^*(F_X(x),F_Y(y)))dxdy = 0$$

が得られるが、これと $C^* \leq M$ である事を合わせると

$$F_{(X^{C^*},Y^{C^*})}(x,y) = C^*(F_X(x),F_Y(y)) = M(F_X(x),F_Y(y)) = \min\{F_X(x),F_Y(y)\},\quad x,y\in\mathbb{R}$$

となり、(X^{C^*}, Y^{C^*}) は共単調となる。 ■

References

[1] Cheung, K.C.: Characterization of Comonotonicity Using Convex Order, *Insurance: Mathematics and Economics,* 43(3), 403–406, 2008.

[2] Cheung, K.C.: Characterizing a Comonotonic Random Vector by the Distribution of the Sum of Its Components, *Insurance: Mathematics and Economics,* 47(2), 130–136, 2010.

[3] Cuesta-Albertos, J. A., Rüschendorf, L. and Tuero-Diaz, A.: Optimal Coupling of Multivariate Distributions and Stochastic Processes, *Journal of Multivariate Analysis,* 46(2), 335–361, 1993.

[4] Denuit, M., Genest, C. and Marceau, É.: Stochastic Bounds on Sums of Dependent Risks, *Insurance: Mathematics and Economics,* 25, 85-104, 1999.

[5] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D.: The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory, *Insurance: Mathematics and Economics,* 31, 3-33, 2002.

[6] Dhaene. J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D.: The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Applications, *Insurance: Mathematics and Economics,* 31, 133-161, 2002.

[7] Embrechts, P., Höing, A. and Puccetti, G.: Worst VaR Scenarios, *Insurance: Mathematics and Economics,* 37(1), 115–134, 2005.

[8] Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D.: Correlation: Pitfalls and Alternatives, *Value at Risk and Beyond* (*ed. Dempster, M.*), Cambridge University Pres, 176–223, 1999.

[9] Föellmer, H. and Schied, A.: *Stochastic Finance 3rd. ed.* Walter de Gruyter, 2011.

[10] Frank, M., Nelsen, R. B. and Schweizer, B.: Best Possible Bounds for the Distribution of a Sum – A Problem of Kolmogorov, *Probability Theory and Related Fields*, 74, 199–211, 1987.

[11] Kano, Y., Berkane, M. and Bentler, P. M.: Covariance Structure Analysis with Heterogeneous Kurtosis Parameters, *Biometrika,* 77(3), 575–585, 1990.

[12] Mao, T. and Hu, T.: A New Proof of Cheung's Characterization of Comonotonicity, *Insurance: Mathematics and Economics,* 48(2), 214–216, 2011.

[13] Moynihan, R., Schweizer, B. and Sklar, A.: Inequalities among Operations on Probability Distribution Functions, In: *General Inequalities 1* (*ed. Beckenbach, E.F.*)*,* Springer Basel AG, 133–149, 1978.

[14] 齋藤 宏基: VaR と CVaR における性質, 金沢大学大学院自然科学研究科修士論文, 2024.

[15] Steyn, H. S.: On the Problem of More Than One Kurtosis Parameter in Multivariate Analysis, *Journal of Multivariate Analysis,* 44, 1–22, 1993.

[16] Tanaka, H.: An Inequality for a Functional of Probability Distributions and Its Application to Kac's One-Dimensional Model of a Maxwellian Gas, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.,* 27, 47–52, 1973.